

4. **Tehtävä:** Osoita, että yhteydettömien kielten luokka on suljettu yhdiste-, katenaatio- ja sulkeumaoperaatioiden suhteen, so. jos kielet $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ ovat yhteydettömiä, niin samoin ovat myös kielet $L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2$ ja L_1^* .

Vastaus: Olkoon L_1 ja L_2 yhteydettömiä kieliä. Tällöin on olemassa kieliopit $G_1 = (V_1, \Sigma_1, R_1, S_1)$ ja $G_2 = (V_2, \Sigma_2, R_2, S_2)$, siten, että $L(G_1) = L_1$ ja $L(G_2) = L_2$. Vaaditaan lisäksi, että $(V_1 - \Sigma_1) \cap (V_2 - \Sigma_2) = \emptyset$, eli kieliopissa ei esiinny samoja väliskeitä. Koska kieliopin väliskeet voidaan tarvittaessa nimetä uudelleen, ei tämä aseta oleellista rajoitusta.

Unioni: Olkoon S uusi väliske ja $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, R_1 \cup R_2 \cup \{S \rightarrow S_1 \mid S_2\}, S)$. Nyt $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2) = L_1 \cup L_2$. Näin on, koska S :stä voidaan johtaa vain S_1 tai S_2 , joista voidaan edelleen johtaa vain sanoja jotka kuuluvat jompaan kumpaan aiemmista kielistä (sääntöjen sekaannukselta vältytään, koska väliskejoukot ovat pistevieraita).

Katenaatio: Tällä kertaa uusi kielioppi $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, R_1 \cup R_2 \cup \{S \rightarrow S_1 S_2\}, S)$. Nyt $L(G) = L_1 L_2$.

Kleenen tähti: Tällä kertaa uusi kielioppi $G = (V_1 \cup \{S\}, \Sigma_1, R_1 \cup \{S \rightarrow \epsilon \mid S S_1\}, S)$. Nyt $L(G) = L_1^*$

5. **Tehtävä:** Laadi yhteydetön kielioppi, joka tuottaa kaikki seuraavan esimerkin tapaiset, yksinkertaisista sisäkkäisistä **for**-silmuista, **begin**- ja **end**-sulkeilla kootuista lauseista ja alkeisoperaatioista **a** rakentuvat "ohjelmat":

```
a;  
for 3 times do  
begin  
  for 5 times do a;  
  a; a  
end
```

Silmukkalaskureiden voit olettaa olevan kokonaislukuja väliltä $0, \dots, 9$.

Vastaus: Ohjelmointikielten kieliopit määritellään useimmiten siten, että aakkostoksi otetaan kielessä esiintyvät syntaktiset elementit (lekseemit). Tässä tapauksessa niitä ovat numerot, **a** sekä varatut sanat. Ohjelman jäsentäminen jaetaan kahteen osaan:

1. Muutetaan ohjelman teksti jonoksi lekseemeitä tilakoneiden avulla.
2. Muodostetaan lekseemijonon jäsenyspuu.

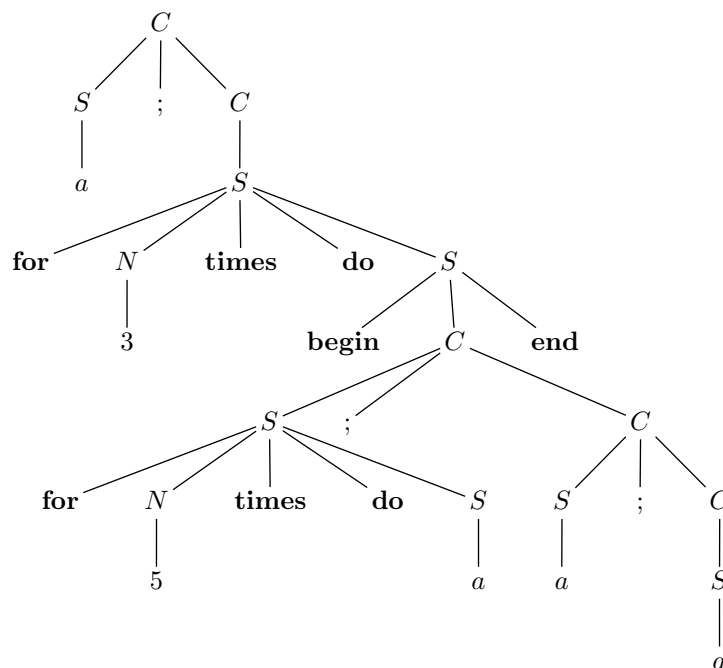
Tehtävän kieliopin voi määritellä monellakin eri tapaa, tässä on yksi mahdollinen tulkinta:

$$\begin{aligned} G &= (V, \Sigma, P, C) \\ V &= \{C, S, N, \mathbf{begin}, \mathbf{do}, \mathbf{end}, \mathbf{for}, \mathbf{times}, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ;, a\} \\ \Sigma &= \{\mathbf{begin}, \mathbf{do}, \mathbf{end}, \mathbf{for}, \mathbf{times}, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ;, a\} \end{aligned}$$

Tässä väliskeen S tulkintana on "lause" (*statement*), C :n "yhdistetty lause" (*compound statement*) ja N :n "numero". Kieliopin säännöt määritellään seuraavasti:

$$\begin{aligned} P &= \{C \rightarrow S \mid S; C \\ &\quad S \rightarrow a \mid \mathbf{begin} C \mathbf{end} \mid \mathbf{for} N \mathbf{times} \mathbf{do} S \\ &\quad N \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9\} \end{aligned}$$

Esimerkki. Tehtävänannossa esiintyneen ohjelman jäsennyypuu:



6. Tehtävä:

1. Osoita, että seuraava yhteydetön kielioppi on moniselitteinen:

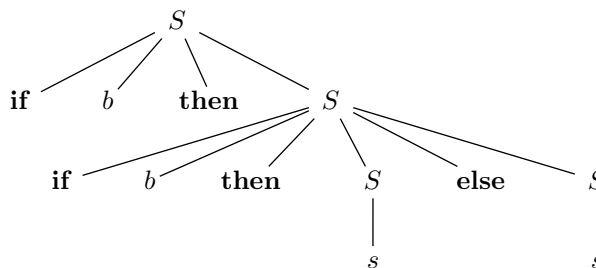
$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow \text{if } b \text{ then } S \\
 S &\rightarrow \text{if } b \text{ then } S \text{ else } S \\
 S &\rightarrow s.
 \end{aligned}$$

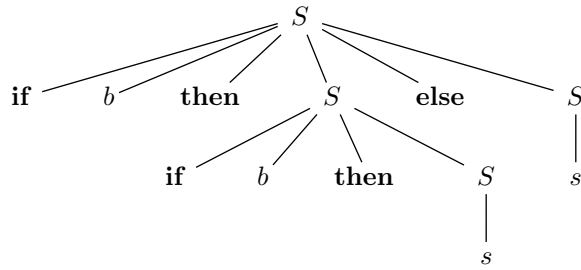
2. Muodosta (a)-kohdan kieliopin kanssa ekvivalentti, so. saman kielen tuottava yksiselitteinen kielioppi.

Vastaus: Yhteydetön kielioppi G on moniselitteinen, mikäli on olemassa sana $w \in L(G)$ siten, että w :llä on ainakin kaksi erilaista jäsennyypuuta. Tehtävän kieliopille yksinkertaisin tällainen sana on:

$$\text{if } b \text{ then if } b \text{ then } s \text{ else } s,$$

joka voidaan jäsentää kahdella tapaa:





Yleensä ohjelmointikielissä halutaan **else**-lause liittää lähimpään mahdolliseen **if**-lauseeseen. Ylläolevista puista ensimmäinen vastaa tätä käytäntöä.

Määritellään kielioppi seuraavasti:

$$\begin{aligned}
 G &= (V, \Sigma, P, S) \\
 V &= \{S, B, U, s, b, \text{if}, \text{then}, \text{else}\} \\
 \Sigma &= \{s, b, \text{if}, \text{then}, \text{else}\} \\
 P &= \{S \rightarrow B \mid U \\
 &\quad B \rightarrow \text{if } b \text{ then } B \text{ else } B \mid s \\
 &\quad U \rightarrow \text{if } b \text{ then } S \mid \text{if } b \text{ then } B \text{ else } U\}
 \end{aligned}$$

Tässä välikielessä B saadaan johdettua vain ohjelmia, joissa kaikilla **if**-lauseilla on sekä **then**- että **else**-haarat. Välikielessä U johdetaan sitten **if**-lauseet, joista puuttuu **else**-haara.