**T-79.1001** **Syksy 2005**
**Tietojenkäsittelyteorian perusteet T**
**Harjoitus 8**
**Demonstraatiotehtävien ratkaisut**

5. **Tehtävä**: Osoita, että yhteydettömien kielten luokka ei ole suljettu leikkausten eikä komplementtien suhteen. (*Vihje:* Esitä kieli $\{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}$ kahden yhteydettömän kielen leikkauksena.)

   **Vastaus**: Olkoon kieli $L = \{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}$. Opetusmonisteessa (s.75) on todistettu, että tämä kieli ei ole yhteydetön. Osoitetaan, että yhteydettömät kielet eivät ole suljettuja leikkauksen suhteen esittämällä $L$:n kahden yhteydettömän kielen leikkauksena.

   Olkoon $L_1 = \{a^i b^k c^k \mid i, k \geq 0\}$ ja $L_2 = \{a^k b^k c^i \mid i, k \geq 0\}$. Nyt sekä $L_1$ että $L_2$ ovat yhteydettömiä, mutta $L = L_1 \cap L_2$, joten yhteydettömät kielet eivät ole suljettuja leikkauksen suhteen.

   Tuloksesta seuraa suoraan se, että yhteydettömät kielet eivät voi olla suljettuja komplementin suhteen, sillä ne ovat suljettuja unionin suhteen ja DeMorganin sääntöjen perusteella $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$.

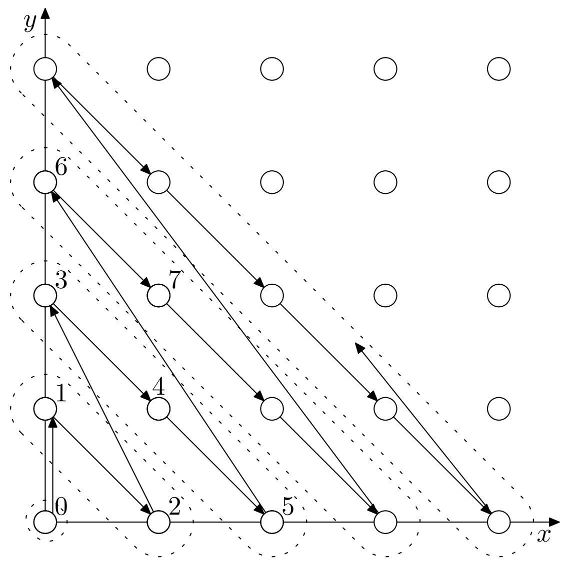
   Osoitetaan vielä lopuksi, että $L_1$ ja $L_2$ ovat todellakin yhteydettömiä muodostamalla niitä vastaavat kieliopit. Kielen $L_1$ generoi yhteydetön kielioppi $G_1 = (\{S, A, B, a, b, c\}, \{a, b, c\}, P_1, S)$, missä $P_1 = \{S \to AB, A \to aA \mid \varepsilon, B \to bBc \mid \varepsilon\}$.

   Kielen $L_2$ generoiva kielioppi $G_2 = (\{S, A, B, a, b, c\}, \{a, b, c\}, P_2, S)$, $P_2 = \{S \to AB, A \to aAb \mid \varepsilon, B \to cB \mid \varepsilon\}$.

6. **Tehtävä:** Osoita, että karteesinen tulo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on numeroituvasti ääretön. (*Vihje:* Ajattele parit $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sijoitetuiksi euklidiseen $(x, y)$-tasoon $\mathbb{R}^2$. Numeroi parit suoran $y = -x$ suuntaisin vinorivein.) Päättele tämän tuloksen perusteella, että myös rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on numeroituvasti ääretön.

   **Vastaus:** Joukko $S$ on numeroituvasti ääretön, mikäli voidaan muodostaa bijektio $f : \mathbb{N} \to S$. Intuitiivisesti tämä tarkoittaa sitä, että kaikille joukon $S$ alkioille voidaan asettaa yksikäsitteinen järjestysnumero.

   Joukon $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alkiot $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ voidaan numeroida seuraavan kuvan mukaisesti:




   Ajatuksena on siis järjestää kaikki lukuparit suoran $y = -x$ suuntaisiin jonoihin, ja numeroida nämä jonot alkioittain yksi kerrallaan lyhyimmästä alkaen. Tässä numerointia ei voida suorittaa $x$-akselin suuntaisesti, sillä silloin kaikki indeksit kuluisivat jo $y$-akselin läpikäyntiin eikä yhtään lukuparia $(x, y), y > 0$ saavutettaisi koskaan.

Ylläoleva numerointi voidaan määritellä seuraavasti:

$$f(x, y) = x + \sum_{k=1}^{x+y} k = x + \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2}$$

Esimerkiksi $f(3, 1) = 13$, eli lukuparin $(3, 1)$ järjestysnumero on 13. Todettakoon vielä, että funktio $f(x, y)$ on todellakin bijektio, eli kutakin järjestysnumeroa vastaa yksikäsitteinen lukupari. Koordinaattiparin laskeminen annetusta indeksistä on kuitenkin hankalampaa, ja se jätetäänkin vastausten lopussa olevaan liitteeseen tiedoksi asiasta kiinnostuneille.

Positiiviset rationaaliluvut $\mathbb{Q}^+$ voidaan esittää $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ -lukuparina s.e.

$$(x, y) \equiv \frac{x}{y}, \qquad y \neq 0$$

Tämä on numeroituvasti äärettömän joukon $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aito osajoukko, joten $\mathbb{Q}^+$ on joko äärellinen tai numeroituvasti ääretön. Jos $\mathbb{Q}^+$ olisi äärellinen, olisi olemassa joku rationaaliluku $\frac{x}{y}, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, y \neq 0$, jolla olisi suurin järjestysluku $n < \infty$ ($\mathbb{Q}^+$:n numeroinnissa). Kuitenkin voidaan aina löytää yo. kuvan perusteella rationaaliluku, jolla olisi järjestysluku $n' > n$, joten tämä on ristiriita oletuksen $\mathbb{Q}^+$ on äärellinen kanssa. Näin ollen $\mathbb{Q}^+$ on numeroituvasti ääretön.

Joukko $\mathbb{Q}^+$ voidaan laajentaa kaikkien rationaalilukujen joukoksi määrittelemällä joukko:

$$\mathbb{Q}^- = \{(-x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{Q}^+\} \ .$$

Koska joukko $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$ on kahden numeroituvasti äärettömän joukon yhdiste, on myös se numeroituvasti ääretön.