

**Kotitehtävät:**

1. Osoita, säännöllisten kielten pumppauslemmaa käyttäen, että parillisen pituisten palindromisanojen muodostama kieli

$$\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

ei ole säännöllinen.

2. Osoita, yhteydettömien kielten pumppauslemmaa käyttäen, että kieli

$$\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

ei ole yhteydettömän. (*Vihje:* Tarkastele muotoa  $a^n b^n a^n b^n$  olevia merkkijonoja.)

3. Osoita, että kahden numeroituvan joukon  $A_1$  ja  $A_2$  yhdiste  $A_1 \cup A_2$  on numeroituva. Päättele tästä induktiolla, että sama pätee  $n:n$  numeroituvan joukon yhdisteelle  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ , kaikilla  $n \geq 2$ . (*Lisäkysymys:* Päteekö väite edelleen, jos yhdistettäviä joukkoja on numeroituvasti ääretön määrä, siis tapauksessa  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$ , missä kukin  $A_i$  on numeroituva?)

**Demonstraatiotehtävät:**

4. Osoita, että yhteydettömien kielten luokka on suljettu yhdiste-, katenaatio- ja sulkeumaoperaatioiden suhteen, so. jos kielet  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$  ovat yhteydettömiä, niin samoin ovat myös kielet  $L_1 \cup L_2$ ,  $L_1 L_2$  ja  $L_1^*$ .
5. Osoita, että yhteydettömien kielten luokka ei ole suljettu leikkausten eikä komplementtien suhteen. (*Vihje:* Esitä kieli  $\{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}$  kahden yhteydettömän kielen leikkauksena.)
6. Osoita, että karteesinen tulo  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  on numeroituvasti ääretön. (*Vihje:* Ajattele parit  $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  sijoitetuiksi euklidiseen  $(x, y)$ -tasoon  $\mathbb{R}^2$ . Numeroi parit suoraa  $y = -x$  suuntaisin vinorivein.) Päättele tämän tuloksen perusteella, että myös rationaalilukujen joukko  $\mathbb{Q}$  on numeroituvasti ääretön.