T-79.1001/1002 **Kevät 2006**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet T/Y
Harjoitus 1, 24.–25.1.
Tehtävät

Muista ilmoittautua kurssille TOPI-järjestelmän kautta 27.1. klo 18 mennessä. Ilmoittautuminen on kirjanpitosyistä **pakollista***, vaikka et olisi aikonutkaan osallistua luennoille tai harjoituksiin.*

Kotitehtävät:

1. (a) Olkoon perusjoukon $A = \{a, b, c, d\}$ relaatio $R \subseteq A \times A$ määritelty:

$$R = \{(a, b), (b, c), (b, d), (c, a), (d, d)\}.$$

Piirrä seuraavien relaatioiden graafiesitykset:

$$\text{(i) } R, \qquad \text{(ii) } R^{-1}, \qquad \text{(iii) } R \circ R, \qquad \text{(iv) } (R \circ R) - R^{-1}.$$

Ovatko jotkin näistä relaatioista funktioita?

(b) Luettele kaikki joukon $\{a, b, c\}$ ekvivalenssirelaatiot (ositukset).

2. Olkoon $\Sigma = \{a, b\}$. Anna esimerkkejä merkkijonoista, jotka kuuluvat seuraaviin kieliin (vähintään kolme esimerkkiä kussakin kohdassa):

   (a) $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ sisältää parillisen määrän } a\text{:ta ja kolmella jaollisen määrän } b\text{:tä}\}$;
   (b) $\{a^{2n}b^{3m} \mid n, m \geq 0\}$;
   (c) $\{uvu^Rv^R \mid u, v \in \Sigma^*\}$;
   (d) $\{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^* \text{ s.e. } w = uu = vvv\}$.

3. Palautetaan mieliin luennolla esitetty merkkijonon $w \in \Sigma^*$ käänteisjonon w^R induktiivinen määritelmä:

   (i) $\varepsilon^R = \varepsilon$;
   (ii) jos $w = ua$, missä $u \in \Sigma^*$ ja $a \in \Sigma$, niin $w^R = au^R$.

   Luennolla osoitettiin, että kaikille $u, v \in \Sigma^*$ on voimassa $(uv)^R = v^Ru^R$. Osoita samaan tapaan, täsmällisesti määritelmään perustuvalla induktiolla, seuraavat tulokset:

   (a) $(w^R)^R = w$;
   (b) $(w^k)^R = (w^R)^k$, kaikilla $k \geq 0$.

Demonstraatiotehtävät:

4. Todista oikeiksi annetun perusjoukon U osajoukkojen A ja B yhdisteiden, leikkausten ja komplementtien suhdetta koskevat *de Morganin kaavat*:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

5. Määritellään perusjoukossa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relaatio $\sim$ säännöllä:

$$(m, n) \sim (p, q) \quad \Leftrightarrow \quad m + n = p + q.$$

   Osoita, että tämä on ekvivalenssirelaatio ja kuvaile intuitiivisesti (“geometrisesti”) sen ekvivalenssiluokkia.

6. Todista induktiolla, että jos X on äärellinen joukko, jonka koko on $n = |X|$, niin sen potenssijoukon koko on $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.