

4. **Tehtävä:** Määritellään perusjoukossa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relaatio \sim säännöllä:

$$(m, n) \sim (p, q) \Leftrightarrow m + n = p + q.$$

Osoita, että tämä on ekvivalenssirelaatio ja kuvaile intuitiivisesti ("geometrisesti") sen ekvivalenssiluokkia.

Vastaus: Relaatio $\sim \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ on määritelty seuraavasti:

$$(m, n) \sim (p, q) \Leftrightarrow m + n = p + q$$

Toisin sanoen, kaksi lukuparia ovat ekvivalentit silloin, kun niiden summat ovat samat.

Relaatio on ekvivalenssirelaatio täsmälleen silloin, kun se on sekä symmetrinen, transitiivinen että refleksiivinen. Tarkistetaan, toteutuvatko ehdot relaatiolle \sim .

i) Relaatio \sim on symmetrinen, jos $(m, n) \sim (p, q)$ aina kun $(p, q) \sim (m, n)$. Koska

$$m + n = p + q \Leftrightarrow p + q = m + n,$$

kuuluu $((p, q), (m, n))$ aina relaatioon, kun $((m, n), (p, q))$ kuuluu, joten symmetriisyys toteutuu.

ii) Relaatio \sim on refleksiivinen, jos kaikille $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pätee $(m, n) \sim (m, n)$. Koska

$$m + n = m + n,$$

ehto toteutuu.

iii) Relaatio \sim on transitiivinen, jos aina kun $(m, n) \sim (p, q)$ ja $(p, q) \sim (k, l)$ myös $(m, n) \sim (k, l)$. Jos pätee:

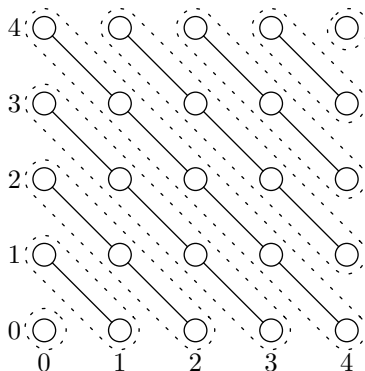
$$m + n = p + q \text{ ja } p + q = k + l,$$

niin

$$m + n = p + q = k + l \Rightarrow m + n = k + l,$$

joten myös transitiivisuus toteutuu.

Koska kaikki kolme ehtoa toteutuivat, on \sim ekvivalenssirelaatio. Alla on relaation graafiesityksen alkuosa:



Kaaviosta nähdään, että relaation määräämät ekvivalenssiluokat vastaavat suoran $y = -x$ suuntaisia suoria.

5. **Tehtävä:** Todista induktiolla, että jos X on äärellinen joukko, jonka koko on $n = |X|$, niin sen potenssijoukon koko on $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

Vastaus: Perustapaus: $X = \emptyset$. Tällöin $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ja $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1 = 2^0$.

Induktio-oletus: oletetaan että on olemassa jokin $k \in \mathbb{N}$ siten, että sääntö pätee kaikille $n \leq k$.

Induktioaskel: olkoon $|X| = k + 1$. Merkitään $X = Y \cup \{x\}$ ($x \notin Y$). Induktio-oletuksen perusteella $|\mathcal{P}(Y)| = 2^k$. Joukkoon $\mathcal{P}(X)$:ään kuuluvat kaikki $\mathcal{P}(Y)$:n joukot sekä $\mathcal{P}(Y)$:n joukkojen unioni joukon $\{x\}$:n kanssa. Saadaan $|\mathcal{P}(X)| = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

6. **Tehtävä:** Todista induktiolla, että jokaisessa äärellisen perusjoukon S osittainjärjestyksessä on ainakin yksi minimialkio. Osoita myös esimerkein, että minimialkio ei välttämättä ole yksikäsitteinen, ja että väite ei ole yleisesti voimassa, jos perusjoukko S on ääretön.

Vastaus: Sovelletaan induktiota S :n kokoon suhteen.

- 1° Perustapaus: Tarkastellaan pienintä mahdollista ei-tyhjää joukkoa $S_1 = \{a_1\}$. Tälle on olemassa vain yksi osittaisjärjestys $R_1 = \{(a_1, a_1)\}$. (Osittaisjärjestys on refleksiivinen, antisymmetrinen ja transitiiivinen binäärirelaatio).

Joukon alkio $a \in S$ on minimialkio, jos se ei esiinny relaatiossa oikealla puolella (refleksiivistä kaarta lukuunottamatta), formaalimmin:

$$\forall a, b \in S : (b, a) \in R \Rightarrow a = b,$$

Osittaisjärjestyksessä R_1 alkio a_1 täyttää ylläolevan ehdon, joten se on minimialkio.

- 2° Induktio-oletus: Oletetaan, että on olemassa jokin luonnollinen luku $n > 1$, jolle pätee: kun $|S| < n$, kaikilla S :n alkiosta muodostetuilla osittaisjärjestyksillä on minimialkio.

- 3° Induktioaskel: Olkoon $S_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ joukko, jossa on n alkioita, ja olkoon R_n jokin (mikä tahansa) S_n :n alkiosta muodostettu osittaisjärjestys. Valitaan nyt mielivaltainen alkio a_i ($1 \leq i \leq n$), poistetaan se joukosta S_n , ja poistetaan relaatiosta kaikki siihen viittaavat parit:

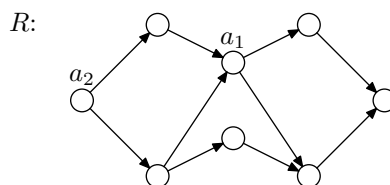
$$\begin{aligned} S'_n &= S_n - \{a_i\} \\ R'_n &= \{(a, b) \in R_n \mid a \neq a_i \wedge b \neq a_i\} \end{aligned}$$

Nyt R'_n on myös osittaisjärjestys (todista tämä, seuraa pohjimmiltaan R_n :n transitiiivisuudesta). Koska joukossa S'_n on $n - 1$ alkioita ($< n$), R'_n :ssa on induktio-oletuksen perusteella ainakin yksi minimialkio, jota merkitään a_{\min} .

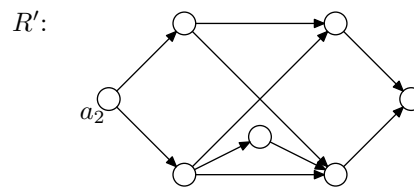
Palataan tarkastelemaan relaatiota R_n . Nyt on olemassa kaksi mahdollista tapausta:

- i) Mikäli kaari $(a_i, a_{\min}) \notin R_n$, on a_{\min} myös osittaisjärjestyksen R_n minimialkio, koska R_n :n ja R'_n :n ainoana erona on alkio a_i ja siihen liittyvät kaaret.
- ii) Mikäli kaari $(a_i, a_{\min}) \in R_n$, ei a_{\min} voi olla minimialkio. Koska a_{\min} on kuitenkin osittaisjärjestyksen R'_n minimialkio ja koska osittaisjärjestys on aina transitiiivinen, relaatiossa R_n ei voi olla kaarta $(b, a_i) \in R_n, b \neq a_i$. Muussa tapauksessa myös kaari $(b, a_{\min}) \in R'_n$, eikä a_{\min} olisi R'_n :n minimialkio. Näin ollen alkio a_i on R_n :n minimialkio, ja induktiotodistus saatiin valmiiksi.

Todistuksen induktioaskelta voidaan havainnollistaa tarkastelemalla seuraavaa osittaisjärjestystä (kaaviosta on jätetty selkeyden vuoksi pois refleksiiviset ja transitiiiviset kaaret):



Poistetaan alkio a_1 . Tällöin jäljelle jää osittaisjärjestys R' :



Tämän osittaisjärjestyksen minimialkio on a_2 . Koska alkuperäisessä järjestyksessä ei ole kaarta (a_1, a_2) , huomataan, että a_2 on myös R :n minimi. Tämä vastaa induktioaskeleen tapausta (i). Tapaus (ii) puolestaan vastaa tilannetta, jossa poistetaan a_2 .

Äärettömän perusjoukon yli määritellyillä osittaisjärjestyksillä ei välttämättä ole minimialkioita. Yksi esimerkki on kokonaisluvut \mathbb{Z} ja osittaisjärjestys \leq .

Yksinkertainen esimerkki osittaisjärjestyksestä, jolla on monta minimiä on:

$$R = \{(p, p), (q, q), (l, l), (q, l), (p, l)\}.$$

Relaatiossa sekä p että q ovat minimialkioita.

