T-79.144 **Syksy 2003**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 9
(opetusmoniste, kappaleet 3.5 - 5.2)
4 - 7.11.2003

1. Osoita, että seuraavat lauseet eivät ole päteviä konstruoimalla struktuuri, jossa lause on epätosi (vastamalli).

a) $\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists y \forall x P(x,y)$

b) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

c) $\neg \forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \vee \neg \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(x))$

2. Muunna seuraavat lauseet konjunktiiviseen normaalimuotoon ja suorita skolemointi.

a) $\forall y(\exists x P(x,y) \rightarrow Q(y,z)) \wedge \exists y(\forall x R(x,y) \vee Q(x,y))$.

b) $\exists x R(x,y) \leftrightarrow \forall y P(x,y)$.

c) $\forall x \exists y Q(x,y) \vee (\exists x \forall y P(x,y) \wedge \neg \exists x \exists y P(x,y))$.

d) $\neg(\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists x \exists y R(x,y)) \wedge \forall x \neg \exists y Q(x,y)$.

3. Johda muista kvanttorisäännöistä säännöt, joilla kvanttorit $\forall x$ ja $\exists x$ voidaan tuoda allaolevista lausemuodoista ulos, s.e. sulkujen sisälle jäävä alikaava säilyy muodoltaan implikaationa.

a) $Q\vec{y}\ (\forall x \phi(x) \rightarrow \psi)$

b) $Q\vec{y}\ (\exists x \phi(x) \rightarrow \psi)$

c) $Q\vec{y}\ (\phi \rightarrow \forall x \psi(x))$

d) $Q\vec{y}\ (\phi \rightarrow \exists x \psi(x))$

4. Muunna seuraavat lauseet klausuulimuotoon:

a) $\neg \exists x((P(x) \rightarrow P(a)) \wedge (P(x) \rightarrow P(b)))$,

b) $\forall y \exists x P(x,y)$,

c) $\neg \forall y \exists x G(x,y)$ ja

d) $\exists x \forall y \exists z(P(x,z) \vee P(z,y) \rightarrow G(x,y))$.

5. *Suunnattu* graafi koostuu joukosta solmuja ja solmujen välisistä *suunnatuista* kaarista. Oletetaan, että solmut on esitetty vakiosymbolien $\{a, b, \ldots\}$ avulla ja kaaret kaksipaikkaisen predikaatin $K(x,y)$ = “solmusta x on kaari solmuun y“ avulla.

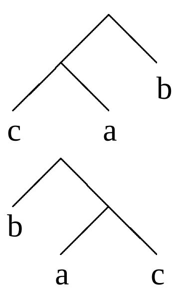
1. Määrittele predikaatit $R_n(x,y) =$ “solmusta x on kaarien suuntainen reitti solmuun y siten, että reitillä on n kappaletta kaaria”, kun n saa arvot $0, 1, 2, \ldots, k$. Kuvaa allaoleva graafi käyttäen predikaattia K.

$$a \; \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{}} \; b \longrightarrow c$$

2. Osoita semanttisella taululla, että laatimastasi kuvauksesta sekä predikaattien R_2 ja R_3 määritelmistä seuraa loogisesti

$$\exists x (R_2(x,x) \wedge R_3(x,c)).$$

6. Esitetään binääripuut kaksipaikkaisen funktiosymbolin s (sisäsolmut) ja yksipaikkaisen funktiosymbolin l (lehtisolmut) avulla. Näin oheisen kuvan ylempi puu saa termiesityksen $s(s(l(c), l(a)), l(b))$.



a) Tarkoittakoon predikaatti $\mathrm{PK}(x,y)$, että binääripuu x on binääripuun y peilikuva. Määrittele predikaatti PK predikaattilogiikan lausein siten, että pystyt päättelemään, ovatko mitkä tahansa kaksi yllä annetun esitystavan mukaista binääripuuta toistensa peilikuvia.

b) Osoita semanttisella taululla, että ylempi binääripuu on alemman binääripuun peilikuva.