T-79.144 **Syksy 2003**

Logiikka tietotekniikassa: perusteet

Laskuharjoitus 1 (johdanto 3.1 - 3.2, lauselogiikka 1.1 - 1.5)

9 – 12.9.2003

1. Osoita induktiolla, että n-alkioisella joukolla on 2^n osajoukkoa ?

Ratk.

Perustapaus: 0-alkioisella joukolla (olettaen $0 \in \mathbb{N}$) eli tyhjällä joukolla on yksi osajoukko, se itse. Lisäksi $2^0 = 1$.

Induktio-oletus: Päteköön periaate n-alkioisille joukoille.

Induktioaskel: Tarkastellaan joukkoa, jossa on $n+1$ alkiota. Valitaan joukosta mielivaltainen alkio a. Tarkasteltavan joukon osajoukot jakautuvat osajoukkojen, joissa a on mukana, joukkoon A ja osajoukkojen, joissa sitä ei ole mukana, joukkoon B. Joukkoa B voidaan tarkastella n-alkioisen joukon osajoukkojen joukkona. Näitä on induktio-oletuksen perusteella 2^n. Toisaalta, jokainen A alkio voidaan bijektiivisesti kuvata tietyksi B:n alkioksi (poistamalla a) ja näin siis $|A| = |B|$. Joukkoja on siis yhteensä $2 * 2^n = 2^{n+1}$.

2. Todista seuraavat lauseet:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

b) $E - (A \cap B) = (E - A) \cup (E - B)$.

Ratk.

Todistus tapahtuu nk. Vennin digrammeilla. Tässä tapauksessa tulee piirtää kolme lomittain menevää vapaamuotoista suljettua kuviota ja merkitä niihin A, B ja C. Todistus etenee värjäämällä kuvioita lauseiden perusteella sisimmistä operaatioista alkaen. Mikäli operaatio on unioni $\cup$, värjätään alue, jossa riittää, että jompikumpi operandeista on edustettuna. Leikkauksessa $\cap$ tulee luonnollisesti olla molemmat. Komplementti $-$ sisältää universumin kaikki muut alkiot.

3. Ilmaise seuraavat väittämät lauselogiikalla:

a) En saa työtä valmiiksi, ellet sinä auta.

b) Ei tippa tapa eikä ämpäriin huku.

c) Kuljen työmatkat jalan, pyörällä tai joskus autolla.

d) Merja ja Arto tulevat meille kylään.

e) Koska olet ollut ilkeä, et saa jälkiruokaa.

f) Vaikka manuaali olikin pitkä, se tuntui loppuvan kesken.

g) Jos minulta kysytään — tai vaikkei kysyttäisikään — niin hänen ei kannata ostaa autoa, tai sitten hänen on asuttava kaukana työpaikastaan ja bensiinin on tultava halvemmaksi.

Ratk:

a) $\neg A \to \neg B$, kun
A = ”Sinä autat”
B = ”Saan työn valmiiksi”

b) $\neg A \wedge \neg B$, kun
A = ”Tippa tappaa”
B = ”Ämpäriin hukkuu”

c) $A \vee B \vee C$, kun
A = ”Kuljen työmatkat jalan”
B = ”Kuljen työmatkat pyörällä”
C = ”Kuljen työmatkat joskus autolla”

d) Joko: A, kun
A = ”Merja ja Arto tulevat meille kylään”
tai: $A \wedge B$, kun
A = ”Merja tulee meille kylään”
B = ”Arto tulee meille kylään”

e) Esim. $A \to \neg B$ tai $A \wedge \neg B$, kun
A = ”Olet ollut ilkeä”
B = ”Saat jälkiruokaa”

f) Esim. $A \wedge B$, kun
A = ”Manuaali oli pitkä”
B = ”Manuaali tuntui loppuvan kesken”

g) $A \vee \neg A \to \neg B \vee (C \wedge D)$, kun
A = ”Minulta kysytään”
B = ”Hänen kannattaa ostaa auto”
C = ”Hänen on asuttava kaukana työpaikastaan”
D = ”Bensiinin on tultava halvemmaksi”

4. Olkoon atomisten lauseiden joukko $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$. Mitkä seuraavista ovat lauselogiikan lauseita. Perustele.

a) A
Ratk. Kyllä, atominen lause.

b) $\neg(A \wedge B))$
Ratk. Ei, ei voida johtaa lauseenmuodostussäännöillä. Myös, ei ole parillista määrää sulkuja.

c) $(A \wedge (B \rightarrow (A \wedge C)))$
Ratk. Kyllä, vastauksesi voinee antaa jäsennyspuun, josta muodostussääntöjen soveltaminen käy ilmi.

d) Tänään sataa.
Ratk. Ei, luonnollista kieltä.

5. Todista että sulkujen määrä jokaisessa lauselogiikan lauseessa on parillinen.

Ratk. Todistetaan väite induktiolla lauseen sisältämien konnektiivien määrän suhteen.

Perustapaus: Lause, jossa ei ole yhtään konnektiivia on atomilause, ja se sisältää 0 sulkua (0 on parillinen luku).

Induktio-oletus: Lause, jossa on korkeintaan n konnektiivia, sisältää parillisen määrän sulkeita.

Induktio-askel: Tarkastellaan lausetta f, jossa on $n+1$ konnektiivia. Lauseen muoto on tällöin yksi seuraavista: $(\neg\alpha)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ tai $(\alpha \leftrightarrow \beta)$. Nyt α ja β ovat lauseita, joissa on korkeintaan n konnektiivia. Induktio-oletuksen mukaan α ja β sisältävät parillisen määrän sulkeita. Näin ollen lause f sisältää myös parillisen määrän sulkeita.

6. Poista tarpeettomat sulut ilman, että lauseen merkitys muuttuu.

a) $(A \rightarrow ((B \wedge C) \vee D))$
b) $(((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
c) $((A \wedge (B \vee C)) \vee (A \wedge (C \vee D)))$
d) $((\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow ((B \rightarrow C) \wedge A))$
e) $(((\neg A) \wedge (\neg B)) \rightarrow \neg(A \vee B))$

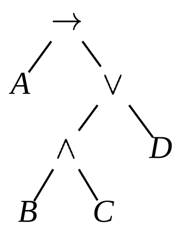
Ratk. Sovelletaan sopimuksia konnektiivien vahvuusjärjestyksestä:

a) $A \rightarrow (B \wedge C) \vee D$
b) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
c) $(A \wedge (B \vee C)) \vee (A \wedge (C \vee D))$
d) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (B \rightarrow C) \wedge A$
e) $\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$

7. Mitä muotoa edellisen tehtävän lauseet ovat. Anna niille jäsennyspuut.

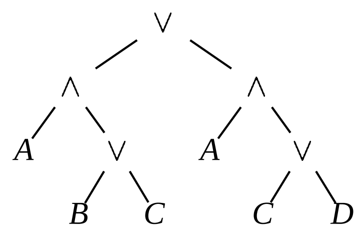
Ratk. Muoto määraytyy uloimmasta konnektiivista:

a) Implikaatio.



b) Implikaatio.

c) Disjunktio.



d) Ekvivalenssi.

e) Implikaatio.

9. Anna allaolevan lauseen alilauseet ja laadi sille totuustaulukko.

$$(\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$$

Ratk. Leveysuuntaisella haulla saadaan: $\neg A \to (\neg B \to C)$, $\neg(\neg A \to B) \to C$, $\neg A$, $\neg B \to C$, $\neg(\neg A \to B)$, C, A, $\neg B$, $\neg A \to B$, B. Lisäksi tietysti lause itse. Totuustaulukon laatiminen on ilmeistä (2^3 riviä ja alilauseiden osoittama määrä sarakkeita).