T-79.144 **Syksy 2003**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 2 (opetusmoniste, lauselogiikka 2.1 - 3.5)
16 – 19.9.2003

1. Määrittele lauselogiikan konnektiivit

a) aina epätoden lauseen ($\perp$) ja implikaation ($\rightarrow$) avulla.
Ratk.
$\neg A \equiv A \rightarrow \perp$
$A \vee B = \neg A \rightarrow B \equiv (A \rightarrow \perp) \rightarrow B$
$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B) = \neg(A \rightarrow \neg B) = \neg(A \rightarrow (B \rightarrow \perp)) \equiv$
$(A \rightarrow (B \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp$
$A \leftrightarrow B = A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A \equiv$
$((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp$

b) Shefferin viivan (opetusmoniste kappale 2.2) avulla. **Ratk.**
$\neg A \equiv (A \mid A)$
$A \wedge B = \neg(A \mid B) \equiv (A \mid B) \mid (A \mid B)$
$A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B) = (\neg A \mid \neg B) \equiv (A \mid A) \mid (B \mid B)$
$A \rightarrow B = \neg A \vee B = \neg(A \wedge \neg B) = (A \mid \neg B) \equiv (A \mid (B \mid B))$
$A \leftrightarrow B = A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A = (A \mid (B \mid B)) \wedge (B \mid (A \mid A)) \equiv$
$((A \mid (B \mid B)) \mid (B \mid (A \mid A))) \mid ((A \mid (B \mid B)) \mid (B \mid (A \mid A)))$

2. Käy läpi kaikki mahdolliset binäärikonnektiivit (yht. 16) ja anna niille määritelmät lauselogiikan peruskonnektiivien avulla.

Ratk.
Eri mahdollisuudet koottu allaolevaan taulukkoon.

p_0	t	t	e	e
p_1	t	e	t	e
$p_0 \vee \neg p_0$	t	t	t	t
$p_0 \vee p_1$	t	t	t	e
$p_1 \rightarrow p_0$	t	t	e	t
p_0	t	t	e	e
$p_0 \rightarrow p_1$	t	e	t	t
p_1	t	e	t	e
$p_0 \leftrightarrow p_1$	t	e	e	t
$p_0 \wedge p_1$	t	e	e	e

p_0	t	t	e	e
p_1	t	e	t	e
$p_0 \mid p_1$	e	t	t	t
$\neg(p_0 \leftrightarrow p_1)$	e	t	t	e
$\neg p_1$	e	t	e	t
$\neg(p_0 \rightarrow p_1)$	e	t	e	e
$\neg p_0$	e	e	t	t
$\neg(p_1 \rightarrow p_0)$	e	e	t	e
$p_0 \downarrow p_1$	e	e	e	t
$p_0 \wedge \neg p_0$	e	e	e	e

3. Olkoon $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{P}$ ja $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{P}$ kaksi totuusjakelua ja $\phi \in \mathcal{L}$ lause. Osoita, että jos $\mathcal{A}_1 \cap At(\phi) = \mathcal{A}_2 \cap At(\phi)$, niin $\mathcal{A}_1 \models \phi \iff \mathcal{A}_2 \models \phi$.

Ratk.
Todistus rakenteellisella induktiolla:
Perustapaus: Olkoon ϕ atominen lause. Tällöin joukko-opillisen leikkauksen määritelmän perusteella joko $\phi \in \mathcal{A}_1$ ja $\phi \in \mathcal{A}_2$ jolloin $\mathcal{A}_1 \models \phi$ ja $\mathcal{A}_2 \models \phi$. Toinen vaihtoehto on, että $\phi \notin \mathcal{A}_1$ ja $\phi \notin \mathcal{A}_2$ jolloin $\mathcal{A}_1 \not\models \phi$ ja $\mathcal{A}_2 \not\models \phi$. Näin ollen ekvivalenssi pätee.

Induktio-oletus: Päteköön väittämä rakenteen kompleksisuuteen n asti. (n voi olla esim. konnektiivien lkm.).

Induktioaskel: Tapausanalyysi eri konnektiivien suhteen.

1. Olkoon lause muotoa $\neg\alpha$. Induktio-oletuksen perusteella väittämä pätee lauseelle α. Nyt jos $\mathcal{A}_1 \models \alpha$ ja $\mathcal{A}_2 \models \alpha$ niin $\mathcal{A}_1 \not\models \neg\alpha$ ja $\mathcal{A}_2 \not\models \neg\alpha$. Edelleen, jos $\mathcal{A}_1 \not\models \alpha$ ja $\mathcal{A}_2 \not\models \alpha$ niin $\mathcal{A}_1 \models \neg\alpha$ ja $\mathcal{A}_2 \models \neg\alpha$. Näin alkup. väittämän ekvivalenssi pysyy voimassa.
2. Olkoon lause muotoa $\alpha \wedge \beta$. Väittämä pätee oletuksen mukaan jälleen sekä α:lle että β:lle. Eri vaihtoehtoja tulee nyt 4. Oletetaan, että molemmat alilauseet ovat tosia molemmissa totuusjakeluissa. Tällöin myös alilauseiden konjunktio on tosi molemmissa ja ekvivalenssi säilyy. Muut tapaukset samaan tapaan (konjunktio epätosi molemmissa).
3. Muut konnektiivit niiden määritelmien mukaan.

4. Olkoon $\mathcal{A} = \emptyset$ totuusjakelu. Laske lauseen

$$(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$$

totuusarvo

b) totuusmääritelmän nojalla.

Ratk. Lause (merkitään sitä ϕ:llä) on muodoltaan implikaatio. Sovelletaan totuusmääritelmää:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models \phi \quad &\iff \quad \mathcal{A} \not\models (\neg B \to \neg A) \text{ tai } \mathcal{A} \models ((\neg B \to A) \to B) \\
\mathcal{A} \not\models \neg B \to \neg A \quad &\iff \quad \mathcal{A} \models \neg B \text{ ja } \mathcal{A} \not\models \neg A. \\
\mathcal{A} \models \neg B \quad &\iff \quad \mathcal{A} \not\models B \\
\mathcal{A} \not\models \neg A \quad &\iff \quad \mathcal{A} \models A
\end{aligned}$$

Nyt siis annetun totuusjakelun perusteella tiedetään, että $\mathcal{A} \not\models A$ ja $\mathcal{A} \not\models B$. Näinollen viimeinen rivi ei toteudu, toisen rivin "ja" ei toteudu ja 1. rivin "tai":n 1. argumentti on epätosi eli $\mathcal{A} \models (\neg B \to \neg A)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \models ((\neg B \to A) \to B) & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \not\models (\neg B \to A) \text{ tai } \mathcal{A} \models B \\ \mathcal{A} \not\models (\neg B \to A) & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models \neg B \text{ ja } \mathcal{A} \not\models A \\ \mathcal{A} \models \neg B & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \not\models B \end{array}$$

Tästä nähdään, että viimeinen rivi toteutuu, samoin toisen rivin "ja"-ehto, jolloin myös ensimmäisen rivin vasen sarake pitää paikkansa, eli $\mathcal{A} \models ((\neg B \to A) \to B)$. Seurauksena ensimmäisen taulukon ensimmäisen rivin oikean sarakkeen "tai"-ehdon jälkimmäinen argumentti pätee, ja siis myös vasen sarake, eli $\mathcal{A} \models \phi$.

Tämä esitystapa oli nk. top-down, monimutkaisemmasta yksinkertaiseen. Toinen vaihtoehto on bottom-up eli lähteä liikkeelle atomilauseista ja edetä monimutkaisempia rakenteita kohti.

5. Insinööri Sörsselssön laati seuraavat vaatimukset liikennevaloille kahden yksisuuntaisen kadun risteykseen:

(i) Kummassakin liikennevalossa on vihreä, keltainen ja punainen lamppu, joista täsmälleen yksi palaa kerrallaan.

(ii) Liikennevalojen vihreät lamput eivät pala yhtäaikaisesti.

(iii) Jos toisessa liikennevalossa palaa punainen lamppu, niin toisessa palaa joko keltainen tai vihreä lamppu.

a) Esitä annetut vaatimukset lauselogiikan lauseina.

b) Laadi syntyneelle lausejoukolle totuustaulukko.

c) Hae taulukon avulla lausejoukolle malli / totuusjakelu, jossa se ei toteudu.

d) Mieti parannusehdotuksia annetuille vaatimuksille (ajatellen todellisia liikennevaloja). Mitä liikennevalojen ominaisuuksia et pysty kuvaamaan lauselogiikan avulla?

Ratk.

a) Käytetään atomisia lauseita $P1$, $K1$ ja $V1$, jotka tarkoittavat että liikennevalon 1 punainen, keltainen ja vihreä lamppu palaa (tässä järjestyksessä). Olkoot $P2$, $K2$ ja $V2$ vastaavat atomiset lauseet liikennevalolle 2. Käydään annetut vaatimukset lävitse:

(i) Liikennevalolle 1 saadaan lause $P1 \vee K1 \vee V1$ (ainakin yksi lampuista palaa) ja lauseet $P1 \rightarrow \neg K1 \wedge \neg V1$, $K1 \rightarrow \neg P1 \wedge \neg V1$, $V1 \rightarrow \neg P1 \wedge \neg K1$ (korkeintaan yksi lampuista palaa). Lisäksi tarvitaan vastaavat lauseet liikennevalolle 2.

(ii) Saadaan lause $\neg(V1 \wedge V2)$.

(iii) Saadaan lauseet $P1 \rightarrow (K2 \vee V2)$ ja $P2 \rightarrow (K1 \vee V1)$.

b) Laaditaan totuustaulu edellisen tehtävän lausejoukolle. Merkitään taulun tiivistämiseksi α_i:llä lausetta $(Pi \vee Ki \vee Vi) \wedge (Pi \rightarrow \neg Ki \wedge \neg Vi) \wedge (Ki \rightarrow \neg Pi \wedge \neg Vi) \wedge (Vi \rightarrow \neg Pi \wedge \neg Ki)$ (joka siis merkitsee, että liikennevalossa i palaa täsmälleen yksi lamppu). Tähdellä merkityt rivit vastaavat lausejoukon malleja.

P1	K1	V1	P2	K2	V2	α_1	α_2	$\neg(V1 \wedge V2)$	$P1 \rightarrow (K2 \vee V2)$	$P2 \rightarrow (K1 \vee V1)$	
E	E	E	E	E	E	E	E	T	T	T	
E	E	E	E	E	T	E	T	T	T	T	
E	E	E	E	T	E	E	T	T	T	T	
E	E	E	E	T	T	E	E	T	T	T	
E	E	E	T	E	E	E	T	T	T	E	
E	E	E	T	E	T	E	E	T	T	E	
E	E	E	T	T	E	E	E	T	T	E	
E	E	E	T	T	T	E	E	T	T	E	
E	E	T	E	E	E	T	E	T	T	T	
E	E	T	E	E	T	T	T	E	T	T	
E	E	T	E	T	E	T	T	T	T	T	*
E	E	T	E	T	T	T	E	E	T	T	
E	E	T	T	E	E	T	T	T	T	T	*
E	E	T	T	E	T	T	E	E	T	T	
E	E	T	T	T	E	T	E	T	T	T	
E	E	T	T	T	T	T	E	E	T	T	
E	T	E	E	E	E	T	E	T	T	T	
E	T	E	E	E	T	T	T	T	T	T	*
E	T	E	E	T	E	T	T	T	T	T	*
E	T	E	E	T	T	T	E	T	T	T	
E	T	E	T	E	E	T	T	T	T	T	*
E	T	E	T	E	T	T	E	T	T	T	
E	T	E	T	T	E	T	E	T	T	T	
E	T	E	T	T	T	T	E	T	T	T	

P1	K1	V1	P2	K2	V2	α_1	α_2	$\neg(V1 \wedge V2)$	$P1 \to (K2 \vee V2)$	$P2 \to (K1 \vee V1)$	
E	T	T	E	E	E	*E*	*E*	*T*	*T*	*T*	
E	T	T	E	E	T	*E*	*T*	*E*	*T*	*T*	
E	T	T	E	T	E	*E*	*T*	*T*	*T*	*T*	
E	T	T	E	T	T	*E*	*E*	*E*	*T*	*T*	
E	T	T	T	E	E	*E*	*T*	*T*	*T*	*T*	
E	T	T	T	E	T	*E*	*E*	*E*	*T*	*T*	
E	T	T	T	T	E	*E*	*E*	*T*	*T*	*T*	
E	T	T	T	T	T	*E*	*E*	*E*	*T*	*T*	
T	E	E	E	E	E	*T*	*E*	*T*	*E*	*T*	
T	E	E	E	E	T	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*
T	E	E	E	T	E	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*
T	E	E	E	T	T	*T*	*E*	*T*	*T*	*T*	
T	E	E	T	E	E	*T*	*T*	*T*	*E*	*E*	
T	E	E	T	E	T	*T*	*E*	*T*	*T*	*E*	
T	E	E	T	T	E	*T*	*E*	*T*	*T*	*E*	
T	E	E	T	T	T	*T*	*E*	*T*	*T*	*E*	
T	E	T	E	E	E	*E*	*E*	*T*	*E*	*T*	
T	E	T	E	E	T	*E*	*T*	*E*	*T*	*T*	
T	E	T	E	T	E	*E*	*T*	*T*	*T*	*T*	
T	E	T	E	T	T	*E*	*E*	*E*	*T*	*T*	
T	E	T	T	E	E	*E*	*T*	*T*	*E*	*T*	
T	E	T	T	E	T	*E*	*E*	*E*	*T*	*T*	
T	E	T	T	T	E	*E*	*E*	*T*	*T*	*T*	
T	E	T	T	T	T	*E*	*E*	*E*	*T*	*T*	
T	T	E	E	E	E	*E*	*E*	*T*	*E*	*T*	
T	T	E	E	E	T	*E*	*T*	*T*	*T*	*T*	
T	T	E	E	T	E	*E*	*T*	*T*	*T*	*T*	
T	T	E	E	T	T	*E*	*E*	*T*	*T*	*T*	
T	T	E	T	E	E	*E*	*T*	*T*	*E*	*T*	
T	T	E	T	E	T	*E*	*E*	*T*	*T*	*T*	
T	T	E	T	T	E	*E*	*E*	*T*	*T*	*T*	
T	T	E	T	T	T	*E*	*E*	*T*	*T*	*T*	
T	T	T	E	E	E	*E*	*E*	*T*	*E*	*T*	
T	T	T	E	E	T	*E*	*T*	*E*	*T*	*T*	
T	T	T	E	T	E	*E*	*T*	*T*	*T*	*T*	
T	T	T	E	T	T	*E*	*E*	*E*	*T*	*T*	
T	T	T	T	E	E	*E*	*T*	*T*	*E*	*T*	
T	T	T	T	E	T	*E*	*E*	*E*	*T*	*T*	
T	T	T	T	T	E	*E*	*E*	*T*	*T*	*T*	
T	T	T	T	T	T	*E*	*E*	*E*	*T*	*T*	

Malleja on siis 7 kappaletta ($2^6 = 64$ mahdollisuutta). Tutkimalla malleja voit huomata, että insinööri Sörsselssönin vaatimukset täyttyvät niiden määräämissä tilanteissa. Väittämä ”liikennevalojen punaiset lamput eivät pala yhtäaikaisesti” voidaan esittää lauseena $\neg(P1 \wedge P2)$. Tämä lause on tosi kaikissa edellisen tehtävän lausejoukon malleissa (tarkista), joten $\neg(P1 \wedge P2)$ on kyseisen lausejoukon looginen seuraus.

c) Väittämästä ”molemmissa liikennevaloissa palaa keltainen lamppu” saadaan lause $K1 \wedge K2$. Olkoon $\mathcal{A}$ totuusjakelu, joka kuvaa atomiset lauseet $K1$ ja $K2$ todeksi (T) ja muut atomiset lauseet epätodeksi (E). Nyt $\mathcal{A}_1 \models (K1 \wedge K2)$, koska $\mathcal{A}_1 \models K1$ ja $\mathcal{A}_2 \models K2)$. Lisäksi kaikille (a)-kohdan lauseille α pätee $\mathcal{A} \models \alpha$ (tarkista). Siis $\mathcal{A}_1$ on malli annetuille vaatimuksille, jossa $K1 \wedge K2$ on tosi. (Mallin haussa voidaan käyttää esimerkiksi semanttista taulua). Olkoon $\mathcal{A}_2$ valuaatio, joka kuvaa atomiset lauseet $V1$ ja $V2$ todeksi ja muut atomiset lauseet epätodeksi. Nyt $\mathcal{A}_2 \not\models \neg(V1 \wedge V2)$, joten lausejoukko ei toteudu.

d) Yksi mahdollisuus on väljentää ensimmäistä vaatimusta, koska liikkeellelähdettäessä punainen ja keltainen lamppu palavat monissa liikennevaloissa yhtäaikaisesti (mieti, kuinka lauseita tulee muuttaa). Lauselogiikan avulla ei voi helposti esittää liikennevalojen toiminnan eri vaiheita (esim. vihreän jälkeen syttyy keltainen lamppu).

6. Tutki totuustaulukoilla, pitävätkö seuraavat väitteet paikkansa.

a) Lause $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ on pätevä.

b) Lause $\neg((A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B))$ on toteutumaton.

c) Lauseet $A \leftrightarrow B$ ja $\neg(A \leftrightarrow \neg B)$ ovat loogisesti ekvivalentteja.

d) $\{(A \wedge B) \vee (C \wedge A), (A \wedge B) \vee \neg B\} \models A \vee (C \wedge \neg B)$.

Ratk.

a) Lauseen alilauseet ovat $A, B, C, A \to B, A \to C, B \to C$, $(B \to C) \to (A \to C)$ sekä lause itse (merkitään sitä ϕ:llä). Lause on pätevä, joss ϕ

saa taulukossa kaikilla totuusjakeluilla arvon tosi.

A	B	C	$A \to B$	$A \to C$	$B \to C$	$(B \to C) \to (A \to C)$	ϕ
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	E	T	E	E	T	T
T	E	T	E	T	T	T	T
T	E	E	E	E	T	E	T
E	T	T	T	T	T	T	T
E	T	E	T	T	E	T	T
E	E	T	T	T	T	T	T
E	E	E	T	T	T	T	T

Viimeinen sarake sisältää pelkästään arvoa T, joten lause on pätevä.

c)

A	B	$A \leftrightarrow B$	$\neg A \leftrightarrow \neg B$
T	T	T	T
T	E	E	E
E	T	E	E
E	E	T	T

Taulukosta nähdään, että lauseiden $A \leftrightarrow B$ ja $\neg A \leftrightarrow \neg B$ sarakkeet ovat identtiset, joten ne ovat loogisesti ekvivalentit.