T-79.144 **Syksy 2003**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 7 (opetusmoniste, kappaleet 1.1 - 2.2)
21 – 24.10.2003

1. Ilmaise seuraavat lauseet predikaattilogiikalla:

a) Jokin porteista on viallinen.

b) Tämä algoritmi on kaikista nopein.

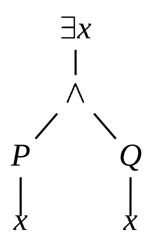
c) Kaikilla kurssin osanottajilla on työasema käytössään.

d) Vain yksi prosesseista voi kirjoittaa kuhunkin tiedostoon kerrallaan.

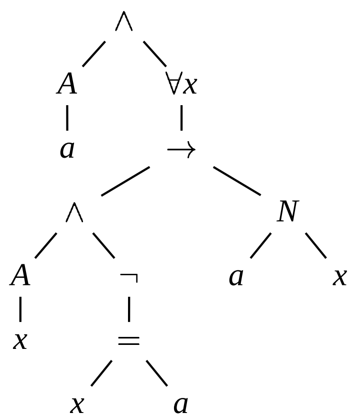
Mitä muotoa lauseet ovat? Piirrä a)- ja c)-kohtia vastaavat syntaksipuut.

Ratk.
Ratkaisussa on käytetty useaan otteeseen rajoitettuja universaali- ja eksistentiaalikvanttoreita. Jos halutaan ilmaista, että jokin ominaisuus $\phi(x)$ pätee kaikille predikaatin $P(x)$ toteuttaville alkioille x, kirjoitetaan $\forall x(P(x) \rightarrow \phi(x))$. Se, että ominaisuus $\phi(x)$ pätee jollekin predikaatin $P(x)$ toteuttavalle alkiolle x, ilmaistaan lauseella $\exists x(P(x) \land \phi(x))$. Tehtävässä predikaatti $P(x)$ ilmaisee usein alkion tyyppiä (esim. x on portti).

a) $\exists x(P(x) \land V(x))$, kun
$P(x)$ = x on portti.
$V(x)$ = x on viallinen.



b) $A(a) \land (\forall x(A(x) \land \neg(x = a) \rightarrow N(a,x))$, kun
a = ko. algoritmi.
$A(x)$ = x on algoritmi.
$N(x,y)$ = x on y:tä nopeampi.



c) $\forall x(K(x) \to \exists y(T(y) \wedge R(x,y)))$, kun
$K(x)$ = x osallistuu kurssille.
$T(x)$ = x on työasema.
$R(x,y)$ = x käyttää y:tä.

d) $\forall x(T(x) \to \forall y \forall z(P(y) \wedge P(z) \wedge K(y,x) \wedge K(z,x) \to y = z))$, kun
$P(x)$ = x on prosessi.
$T(x)$ = x on tiedosto.
$K(x,y)$ = x kirjoittaa y:hyn.

Esitetyt ratkaisut eivät ole ainoita mahdollisia. Valinnan varaa on predikaatti-, funktio- ja vakiosymbolien märittelyssä ja lauseiden rakenteessa.

2. Poista tarpeettomat sulut, ilman että lauseen merkitys muuttuu.

a) $(\forall y((\exists x(P(x) \wedge Q(x))) \to L(x)))$

b) $((\exists x(\exists y(P(x,y) \vee Q(y,x)))) \leftrightarrow (\forall x(\neg K(f(x)))))$

c) $(\forall x(\forall y(A \wedge B)))$

Ratk.
Sulkujen poistamisessa käytettiin periaatetta, että uloimmat sulut voi jättää pois ja lisäksi, mikäli sulkujen sisällä oleva operaatio on presedenssiltään ulkopuolella olevaa vahvempi, sulut voidaan poistaa.

a) $\forall y((\exists x(P(x) \wedge Q(x))) \to L(x))$
Tässä kaava on esitetty ilman uloimpia sulkuja. Tarkasteltaessa nyt uloimpia sulkuja, niin sisällä oleva operaatio on implikaatio ja ulkopuolella universaalinen kvantifiointi. Kvantifiointi on vahvempi, sulkuja ei voi poistaa. Tarkastellaan seuraavaksi sulkuja eksistenttikvanttorin ympärillä. Sisällä siis em. kvantifionti ja ulkopuolella implikaatio. Sulut voi poistaa ja kaava saa muodon $\forall y(\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \to$

$L(x))$. Jäljellä on vielä sulut konjunktion ympärillä. Ulkopuolella oleva kvantifiointi on vahvempi, sulkuja ei voi poistaa.

b) $\exists x \exists y (P(x,y) \vee Q(y,x)) \leftrightarrow \forall x \neg K(f(x))$

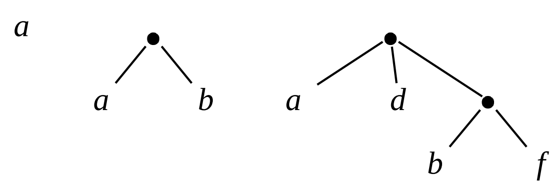
c) $\forall x \forall y (A \wedge B)$

3. Olkoon predikaattilogiikan kielessä vakiosymboli c, 1-paikkainen funktiosymboli f ja 2-paikkainen funktiosymboli g. Millaisia muuttujattomia termejä näistä voidaan muodostaa.

Ratk.
Käyttämällä ainoastaan elementtejä c ja f, voidaan muodostaa seuraava joukko termejä: $\{c, f(c), f^2(c), f^3(c), \ldots\}$. Edelleen termejä voidaan laatia käyttämällä hyväksi funktiota g. Sen argumenteiksi voidaan valita mikä tahansa pari edellisistä, esim. saadaan termit $g(c,c)$ ja $g(f^3(c), f^{108}(c))$. Luonnollisesti sekä g:n että f:n argumenteiksi voidaan edelleen valita mitkä tahansa näin saaduista termeistä. Näin syntyy esim. $f(g(f^5(c), f^{13}(c)))$ ja $g(g(c, f(c)), f^8(c))$. Funktioiden sisennystä voi näin jatkaa mielivaltaisen monta askelta.

4. Luennoilla annettiin menettely binääripuiden esittämiseksi funktiosymbolien avulla. Yleistä konstruktio mielivaltaisille puille käyttämällä korkeintaan 3 vakio- ja funktiosymbolia.

Ratk.
Yleistys tapahtuu käyttämällä hyväksi sekä listojen että puiden notaatiota. Periaate on, että mielivaltainen puu esitetään sisäkkäisinä listoina, jotka kertovat kunkin solmun lapset. Olkoon tehtävässä esitetyt 3 vakio- ja funktiosymbolia e, tyhjä lista, $c \in \mathcal{F}_2$, 1. argumentti listan ensimmäinen alkio ja 2. loput listasta, ja $l \in \mathcal{F}_1$, lehtisolmu. Tarkastellaan seuraavia puita:



Näistä ensimmäinen esitetään annetulla notaatiolla muodossa $l(a)$, toinen $c(l(a), c(l(b), e))$ ja kolmas saa muodon
$c(l(a), c(l(d), c(c(l(b), c(l(f), e)), e)))$

5. Osoita, että jos $\forall x \phi(x)$ on lause ja t on muuttujaton termi, niin $\phi(t)$ on lause.

Ratk.
Opetusmonisteessa todetaan, että "kaava on *lause*, jos siinä ei ole vapaita muuttujaesiintymiä". Tehtävänannossa todetaan, että $\forall x\phi(x)$ on lause. $\phi(t)$ tarkoittaa kaavaa, jossa jokainen x:n vapaa esiintymä on korvattu termillä t. Koska t on muuttujaton, niin $\phi(t)$ on myös lause.

6. Olkoon universumina $U = \mathbb{N}^2 = \{\langle x,y\rangle | x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$. Valitse vakiosymbolille c ja funktiosymbolille $f \in \mathcal{F}_1$ tulkinnat siten, että koko universumi tulee nimetyksi.

Ratk.
Muodostetut lukuparit voi asettaa kaksiulotteiseen taulukkoon vaikkapa seuraavasti:

$$\begin{array}{ccccc}
\langle 0,0\rangle & \langle 0,1\rangle & \langle 0,2\rangle & \langle 0,3\rangle & \cdots \\
\langle 1,0\rangle & \langle 1,1\rangle & \langle 1,2\rangle & \langle 1,3\rangle & \cdots \\
\langle 2,0\rangle & \langle 2,1\rangle & \langle 2,2\rangle & \langle 2,3\rangle & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Tehtävän idea on sama kuin todistettaessa sitä, että kahden luonnollisen luvun pareja on yhtä monta kuin luonnollisia lukuja (joukot siis ovat yhtä mahtavat). Todistuksessa laaditaan bijektiivinen kuvaus luonnollisilta luvuilta lukupareille. Kuvauksessa $f(0) = \langle 0,0\rangle$ ja muilla arvoilla se etenee aina taulukon diagonaaleja pitkin. Esim. $f(1) = \langle 0,1\rangle$, $f(2) = \langle 1,0\rangle$ jne. Mikäli kuvaus etenisi rivejä tai sarakkeita pitkin, ei joukkojen yhtäsuuruutta saataisi osoitettua, koska rivit (sarakkeet) jatkuvat äärettömiin. Mielivaltainen diagonaali puolestaan on äärellinen.

Sovelluttuna logiikkaan, universumi saadaan peitettyä, mikäli vakion c tulkinta on $c^{\mathcal{S}} = \langle 0,0\rangle$, ja funktio laaditaan em. sääntöjen pohjalta, siis:

$$\begin{array}{rclrcl}
f(c)^{\mathcal{S}} & = & \langle 0,1\rangle & f(f(c))^{\mathcal{S}} & = & \langle 1,0\rangle \\
f^3(c)^{\mathcal{S}} & = & \langle 0,2\rangle & f^4(c)^{\mathcal{S}} & = & \langle 1,1\rangle \\
\vdots & & & \vdots & &
\end{array}$$

Funktion $f^{\mathcal{S}}$ lausekkeen voi esittää muodossa:

$$\begin{aligned}
&f^{\mathcal{S}} : \langle x,y\rangle \to \langle x',y'\rangle \\
&\quad x' = g(x)(y+1) + (1-g(x))(x-1) \\
&\quad y' = (1-g(x))(y+1)
\end{aligned}$$

Tässä $g(x)$ on nk. pulssifunktio:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x = 0. \\ 0, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

7. Graafi muodostuu solmujen joukosta S ja solmujen välisten kaarien $K \subseteq S \times S$ joukosta. Graafin solmuja s ja s' sanotaan vierekkäisiksi, jos niitä yhdistää kaari ($\langle s, s' \rangle \in K$). Olkoon C jokin värien joukko. Graafin *väritysongelmassa* on tarkoituksena löytää graafin solmuille värit joukosta C siten, että kaikilla vierekkäisillä solmuilla on eri värit.

a) Määrittele graafin väritysongelman ratkaisu predikaattilogiikan avulla.

b) Anna edellisen kohdan lausejoukolle malli ja

c) struktuuri, jossa se ei toteudu.

Ratk.

a) Graafista meitä kiinnostavat erityisesti kaaret, joiden esittämistä varten määritellään predikaatti $K(x,y)$ (graafissa on kaari solmusta x solmuun y). Värien esittämiseen on useita mahdollisuuksia.

(i) Yksi mahdollisuus on kiinnittää värien joukko ja esittää värit predikaatein. Jos joukossa C on värejä n kpl määritellään niille kullekin predikaatit $C_1(x), \ldots, C_n(n)$. Predikaatti $C_i(x)$ tarkoittaa, että solmu x on väriltään C_i. Ongelman määrittelyssä vaaditaan, että jokaisella solmulla on yksikäsitteinen väri ja että jos solmujen välillä on kaari, solmut ovat erivääriset. Ensimmäisestä vaatimuksesta saadaan lauseet

$$\forall x (C_i(x) \leftrightarrow \neg C_1(x) \wedge \cdots \wedge \neg C_{i-1}(x) \wedge \neg C_{i+1} \wedge \cdots \wedge \neg C_n(x))$$

indeksin i arvoilla $1, \ldots, n$ (huomaa, että $\neg C_i(x)$ ei esiinny ekvivalenssin oikean puolen konjuktiossa). Toinen vaatimus esitetään jokaisen predikaatin $C_i(x)$ osalta erikseen:

$$\forall x \forall y (K(x,y) \rightarrow (C_i(x) \rightarrow \neg C_i(y))).$$

(ii) Toinen mahdollisuus on jättää värien määrittely avoimeksi ja ottaa käyttöön predikaatti $V(x,y)$ (solmun x väri on y). Solmun värin yksikäsitteisyys voidaan ilmaista lauseella

$$\forall x \forall y \forall z (V(x,y) \wedge V(x,z) \rightarrow y = z).$$

Siis, jos solmulla x on värit y ja z, nämä ovat itseasiassa sama väri (yhtäsuuruus predikaatti $=$ on tosi rakenteessa $\mathcal{S}$, jos ja vain jos predikaatin argumenttien tulkinnat ovat samat rakenteessa $\mathcal{S}$). Vierekkäisten solmujen erivärisyys saadaan puettua lauseeksi

$$\forall x \forall y \forall z (K(x,y) \to (V(x,z) \to \neg V(y,z)).$$

Eli, jos graafissa on kaari solmusta x solmuun y ja solmu x on väriltään z, solmu y ei ole väriltään z.

(iii) Kolmantena mahdollisuutena on esittää väri funktiosymbolin v avulla. Termi $v(x)$ tarkoittaa solmun x väriä. Tässä tapauksessa värin yksikäsitteisyyttä ei tarvitse erikseen määritellä (funktion arvo on aina yksikäsitteinen). Erivärisyydelle saadaan lause

$$\forall x \forall y (K(x,y) \to \neg (v(x) = v(y))).$$

b) Annetaan malli kohdan (i) lauseille tapauksessa $n = 2$. Määritellään rakenne $\mathcal{S}$, jonka universumina on $U = \{a_1, a_2\}$ (kaksi solmua). Predikaatin K tulkinta on $K^{\mathcal{S}} = \{\langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_1 \rangle\}$ (graafissa on kaaret solmusta a_1 solmuun a_2 ja solmusta a_2 solmuun a_1). Predikaattien C_1 ja C_2 tulkinnat ovat $C_1^{\mathcal{S}} = \{a_1\}$ ja $C_2^{\mathcal{S}} = \{a_2\}$ (toinen solmuista on siis väriä C_1 ja toinen väriä C_2).

Tarkistetaan nyt totuusmääritelmän avulla, että lauseet

$$\forall x (C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x))$$

$$\forall x \forall y (K(x,y) \to (C_1(x) \to \neg C_1(y))$$

ja

$$\forall x \forall y (K(x,y) \to (C_2(x) \to \neg C_2(y))$$

toteutuvat rakenteessa $\mathcal{S}$ (eli $\mathcal{S}$ on lauseiden malli). Huomaa että lauseista ensimmäinen on ekvivalentti lauseen

$$\forall x (C_2(x) \leftrightarrow \neg C_1(x))$$

kanssa, joka myös kuuluu lausejoukkoon tapauksessa $n = 2$. Nyt

$$\mathcal{S} \models \forall x (C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x))$$

jos ja vain jos

$$\mathcal{S}[x \mapsto a_1] \models (C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x)) \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{S}[x \mapsto a_2] \models (C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x))$$

Koska $a_1 \in C_1^{\mathcal{S}}$,
$$\mathcal{S}[x \mapsto a_1] \models C_1(x)$$
ja koska $a_1 \notin C_2^{\mathcal{S}}$,
$$\mathcal{S}[x \mapsto a_1] \not\models C_2(x)$$
Siis
$$\mathcal{S}[x \mapsto a_1] \models (C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x))$$
Vastaavasti osoitetaan, että $\mathcal{S}[x \mapsto a_2] \models (C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x))$, joten $\mathcal{S} \models \forall x(C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x))$ seuraa.
Vastaavasti
$$\mathcal{S} \models \forall x \forall y(K(x,y) \to (C_1(x) \to \neg C_1(y))$$
jos ja vain jos kaava
$$K(x,y) \to (C_1(x) \to \neg C_1(y))$$
on tosi rakenteissa
$$\begin{array}{lcl} \mathcal{S}[x \mapsto a_1, y \mapsto a_1], & & \mathcal{S}[x \mapsto a_1, y \mapsto a_2], \\ \mathcal{S}[x \mapsto a_2, y \mapsto a_1] & \text{ja} & \mathcal{S}[x \mapsto a_2, y \mapsto a_2]. \end{array}$$
Koska parit $\langle a_1, a_1 \rangle$ ja $\langle a_2, a_2 \rangle$ eivät kuulu tulkintaan $K^{\mathcal{S}}$ atomikaava $K(x,y)$ on epätosi ensimmäisessä ja viimeisessä rakenteessa, joten implikaation totuusmääritelmän nojalla edelläannettu kaava on tosi näissä rakenteissa. Koska pari $\langle a_1, a_2 \rangle$ kuuluu tulkintaan $K^{\mathcal{S}}$, $\mathcal{S}[x \mapsto a_1, y \mapsto a_2] \models K(x,y)$ ja annettu kaava on tosi rakenteessa $\mathcal{S}[x \mapsto a_1, y \mapsto a_2]$ jos ja vain jos $\mathcal{S}[x \mapsto a_1, y \mapsto a_2] \models C_1(x) \to \neg C_1(y)$. Tämä pitää paikkansa, sillä $a_1 \in C_1^{\mathcal{S}}$ ja $a_2 \notin C_2^{\mathcal{S}}$, joten $\mathcal{S}[x \mapsto a_1, y \mapsto a_2] \models C_1(x)$ ja $\mathcal{S}[x \mapsto a_1, y \mapsto a_2] \models \neg C_2(y)$. Kaava on tosi myös 3. struktuurissa. Erona edelliseen on , että implikaatio $C_1(x) \to \neg C_1(y)$ on tosi rakenteessa $\mathcal{S}$, koska $\mathcal{S}[x \mapsto a_2, y \mapsto a_1] \not\models C_1(x)$. Siis $\mathcal{S}$ on malli lauseelle $\forall x \forall y(K(x,y) \to (C_1(x) \to \neg C_1(y))$.
Symmetriasyistä $\mathcal{S}$ on myös lauseen

$\forall x \forall y(K(x,y) \to (C_2(x) \to \neg C_2(y))$

malli. Olemme siis osoittaneet, että $\mathcal{S}$ on lausejoukon malli. Sama rakenne on malli myös tapauksessa, jossa värejä on useampia kuin kaksi. Malleista tulee monimutkaisempia, jos solmujen väritys esitetään vaihtoehtojen (ii) ja (iii) mukaisesti.

c) Määritellään rakenne $\mathcal{S}$ tapauksessa $n = 2$, jossa lausejoukko ei toteudu. Valitaan universumiksi $U = \{a\}$ (yksi solmu) ja predikaatin K tulkinnaksi esim. $K^{\mathcal{S}} = \{\langle a, a \rangle\}$. Nyt

$$\forall x (C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x))$$

ei toteudu rakenteessa $\mathcal{S}$, jos

$$\mathcal{S}[x \mapsto a] \not\models C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x)$$

Valitaan siis väripredikaattien tulkinnat siten, että

$$\mathcal{S}[x \mapsto a] \models C_1(x) \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{S}[x \mapsto a] \models C_2(x)$$

asettamalla

$$C_1^{\mathcal{S}} = C_2^{\mathcal{S}} = \{a\}$$

Tällöin $\mathcal{S}$ ei voi olla lausejoukon malli.