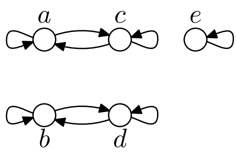
Tik-79.148 **Kevät 2001**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Laskuharjoitus 1
Ratkaisut

4. Tehtävässä on annettuna kaksi joukkoa, A ja B, sekä funktio $f : A \to B$. Nyt määritellään relaatio $R \subseteq A \times A$ (eli relaatio A:n alkioiden välillä) käyttäen apuna joukkoa B ja funktiota f. Pari (a, b) kuuluu relaatioon R täsmälleen silloin, kun funktio f kuvaa ne samalle joukon B alkiolle, eli kun $f(a) = f(b)$.

   Esimerkkinä tällaisesta tilanteesta olisi:

$$\begin{aligned} A &= \{a, b, c, d, e\} \\ B &= \{1, 2, 3\} \\ f &= \{(a, 1), (b, 2), (c, 1), (d, 2), (e, 3)\} \ . \end{aligned}$$

   Koska sekä $f(a) = 1$ että $f(c) = 1$, kuuluvat parit (a, c) ja (c, a) relaatioon R. Samoin $f(b) = 2 = f(d)$, joten $(b, d) \in R$ ja $(d, b) \in R$. Koska funktion arvot ovat yksikäsitteisiä, tulee relaatioon myös parit (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), ja (e, e). Alla on esitetty relaatio graafisessa muodossa:



   Tehtävässä on tarkoituksena osoittaa, että valittiinpa joukot A ja B sekä funktio f miten tahansa, niin relaatio $R = \{(a, b) \mid f(a) = f(b)\}$ on aina ekvivalenssirelaatio. Relaation on ekvivalenssirelaatio täsmälleen silloin, kun se on sekä symmetrinen, transitiivinen että refleksiivinen. Tarkistetaan, toteutuvatko ehdot relaatiolle R.

   i) Relaatio $R \subseteq A \times A$ on symmetrinen, jos $(b, a) \in R$ aina kun $(a, b) \in R$. Koska
$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow f(b) = f(a),$$
   kuuluu (b, a) aina relaatioon, kun (a, b) kuuluu, joten symmetrisyys toteutuu.

   ii) Relaatio $R \subseteq A \times A$ on refleksiivinen, jos kaikille $a \in A$ pätee $(a, a) \in R$. Koska
$$f(a) = f(a),$$
   ehto toteutuu.

   iii) Relaatio $R \subseteq A \times A$ on transitiivinen, jos aina kun $(a, b) \in R$ ja $(b, c) \in R$ myös $(a, c) \in R$. Toisin sanoen, mikäli alkiosta a päästään jotain ketjua pitkin alkioon b, täytyy sinne olla myös suora yhteys.

Jos pätee

$$f(a) = f(b) \wedge f(b) = f(c),$$

niin

$$f(a) = f(b) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(c),$$

joten myös transitiivisuus toteutuu.

Koska kaikki kolme ehtoa toteutuivat, on R ekvivalenssirelaatio.

5. Osittaisjärjestykseltä vaaditaan, että se on refleksiivinen ja transitiivinen ja että siinä ei ole ei-triviaaleja silmukoita.

   Relaatiolle $R_S = \{(A, B) \mid A, B \in S \text{ ja } A \subseteq B\}$ pätee:

   i) Koska $A \subseteq A$, kaikille $A \in S : (A, A) \in R_S$, joten relaatio on refleksiivinen.
   ii) Koska $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$, myös transitiivisuus toteutuu.
   iii) Relaatiossa voi syntyä silmukka ainoastaan, jos $A \subseteq B$ ja $B \subseteq A$. Tällöin kuitenkin $A = B$, eli silmukka on triviaali.

6. Joukko A on suljettu jonkin funktion $f(a_1, \ldots, a_n)$ suhteen[1], mikäli aina kun $a_1, \ldots, a_n \in A$ myös $f(a_1, \ldots, a_n) \in A$. Toisin sanoen, jos kaikki funktion argumentit kuuluvat joukkoon A, niin myös funktion tulos kuuluu siihen. Esimerkiksi luonnollisten lukujen joukko on suljettu yhteenlaskun suhteen, mutta vähennyslasku ei ole, koska sen tulos voi olla negatiivinen.

   Relaatiota B kutsutaan relaation R sulkeumaksi ominaisuuden P suhteen mikäli $R \subseteq B$, ja B on pienin relaatio, joka on suljettu P:n suhteen. Tässä kannattaa muistaa, että relaatio on itsessään joukko järjestettyjä pareja.

   Tarkastellaan relaatiota $R \subseteq A \times A$, missä $A = \{a, b, c, d\}, R = \{(a, b), (c, a)\}$, ja sen suhdetta symmetriaan. Relaatio on symmetrinen, mikäli $(b, a) \in R$ aina, kun $(a, b) \in R$, joten ominaisuutta vastaava funktio $f_s : A \times A \rightarrow A \times A$ kääntää kaikki relaation kaaret ympäri:

   $$f_s((x, y)) = (y, x).$$

   Nyt nähdään, että R ei ole suljettu symmetrian suhteen koska esim. $(a, b) \in R$, mutta $f((a, b)) = (b, a) \notin R$. Relaation R:n symmetrinen sulkeuma R_s saadaan lisäämällä kaikkiin kaariin paluukaaret:

   $$R_s = \{(a, b), (b, a), (c, a), (a, c)\}.$$

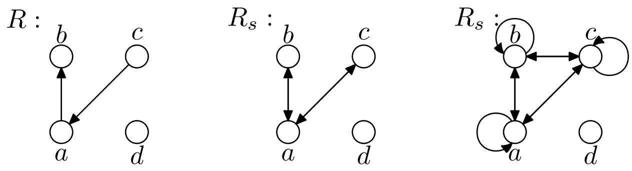
   R_s:n transitiivista sulkeumaa R_{st}varten täytyy lisätä kaari (x, z) aina, kun on olemassa kaaret $(x, y) \in R_s$ ja $(y, z) \in Rs$. Erityisesti täytyy huomata, että koska R_s on symmetrinen, niin kaikille kaarille $(x, y) \in R_s$ on olemassa paluukaari $(y, x) \in R_s$, joten myös $(x, x) \in R_{st}$. Lisäämällä kaikki tarvittavat kaaret saadaan

   $$R_{st} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

[1] Tässä funktio f on jokin kuvaus $f : A^n \rightarrow B$ ja $A \subseteq B$.

Saatu R_{st} ei kuitenkaan ole refleksiivinen, sillä $d \in A$, mutta $(d, d) \notin R_{st}$. Refleksiivisyyteen vaaditaan, että kaikille $x \in A$ pätee $(x, x) \in R$. Tehtävän väitteelle löytyi siis vastaesimerkki.

Kannattaa kuitenkin huomata, että R_{st} ei ole refleksiivinen vain siinä tapauksessa, että A:ssa on jokin alkio, joka ei esiinny R:ssä. Muulloin R_{st} on refleksiivinen.



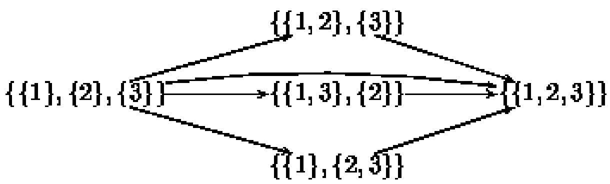
7. Joukon S *ositus* $P = \{P_1, \ldots, P_n\}$ on kokoelma joukkoja siten, että kukin S:n alkioista esiintyy täsmälleen yhdessä joukossa P_i ja kaikissa P:n joukoissa on vähintään yksi alkio. Formaalisti määriteltynä P on S:n ositus, mikäli P täyttää seuraavat ehdot:

   - $P_i \neq \emptyset$ kaikilla $1 \leq i \leq n$.
   - $P_i \cap P_j = \emptyset$ kaikilla $i \neq j$.
   - $\bigcup P_i = S$.

   Esimerkiksi joukon $S = \{1, 2, 3\}$ kaikkien ositusten joukko Π on:

$$\begin{aligned}\Pi = \{&\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}\},\\ &\{\{1\}\{2, 3\}\}, \{1, 2, 3\}\}\}\end{aligned}$$

   Allaolevassa kuvassa näkyy miten relaatio R on määritelty Π:n alkioille (refleksiiviset kaaret on jätetty pois kuvasta selkeyden vuoksi):



   i) Refleksivisyys: Koska $S_i \subseteq S_i$ kaikilla $S_i \in \Pi_j$, on relaatiossa kaari (Π_j, Π_j) kaikilla Π_j $(1 \leq i \leq |\Pi_j|,\ 1 \leq j \leq |\Pi|)$.

   ii) Transitiivisuus: Mikäli $(\Pi_i, \Pi_j) \in R$ ja $(\Pi_j, \Pi_k) \in R$, niin kaikilla $S_i \in \Pi_i$ täytyy olla vastine $S_j \in \Pi_j$ siten, että $S_i \subseteq S_j$. Relaation R määritelmän perusteella täytyy olla olemassa myös $S_k \in \Pi_k$ siten, että $S_j \subseteq S_k$. Nyt $S_i \subseteq S_j \subseteq S_k$, joten erityisesti $S_i \subseteq S_k$ ja relaatiossa täytyy olla kaari (Π_i, Π_k).

   iii) Silmukattomuus: Mikäli $(\Pi_i, \Pi_j) \in R$ ja $(\Pi_j, \Pi_i) \in R$ tiedämme, että kaikilla $S_i \in \Pi_i$ täytyy olla vastine $S_j \in \Pi_j$ siten, että $S_i \subseteq S_j$. Toisaalta, täytyy olla olemassa myös $S'_i \in \Pi_i$ ja $S_j \subseteq S'_i$. Tästä seuraa, että $S_i \subseteq S_i'$. Osituksen määritelmän perusteella tiedämme, että kaikissa osituksen Π_i joukoista on ainakin yksi alkio, ja kukin joukon S alkioista voi esiintyä vain yhdessä Π_i:n joukoista. Näin ollen $S_i \subseteq S_i'$ on mahdollista vain, jos $S_i = S_i'$, joten

$$S_i \subseteq S_j \subseteq S_i \quad ,$$

eli $S_i = S_j$. Koska kaikkien joukkojen S_i vastine on S_i itse, $\Pi_i = \Pi_j$ ja silmukka on triviaali.

Relaation R maksimialkio on triviaaliositus, jonka ainoa alkio on joukko S itse. Minimialkio puolestaan on ositus, jossa kukin S:n alkioista esiintyy itsenäisesti.