T-79.148 **Kevät 2002**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Laskuharjoitus 1
Demonstraatiotehtävien ratkaisut

4. **Tehtävä:** Määritellään perusjoukossa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relaatio $\sim$ säännöllä:

$$(m,n) \sim (p,q) \quad \Leftrightarrow \quad m+n = p+q.$$

Osoita, että tämä on ekvivalenssirelaatio ja kuvaile intuitiivisesti ("geometrisesti") sen ekvivalenssiluokkia.

Vastaus: Relaatio $\backsim \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ on määritelty seuraavasti:

$$(m,n) \backsim (p,q) \quad \Leftrightarrow \quad m+n = p+q$$

Toisin sanoen, kaksi lukuparia ovat ekvivalentit silloin, kun niiden summat ovat samat.

Relaatio on ekvivalenssirelaatio täsmälleen silloin, kun se on sekä symmetrinen, transitiivinen että refleksiivinen. Tarkistetaan, toteutuvatko ehdot relaatiolle $\backsim$.

i) Relaatio $\backsim$ on symmetrinen, jos $(m,n) \backsim (p,q)$ aina kun $(p,q) \backsim (m,n)$. Koska

$$m+n = p+q \Leftrightarrow p+q = m+n,$$

kuuluu $((p,q),(m,n))$ aina relaatioon, kun $((m,n),(p,q))$ kuuluu, joten symmetrisyys toteutuu.

ii) Relaatio $\backsim$ on refleksiivinen, jos kaikille $(m,n) \in \mathbb{N}$ pätee $(m,n) \backsim (m,n)$. Koska

$$m+n = m+n,$$

ehto toteutuu.

iii) Relaatio $\backsim$ on transitiivinen, jos aina kun $(m,n) \backsim (p,q)$ ja $(p,q) \backsim (k,l)$ myös $(m,n) \backsim (k,l)$. Jos pätee:

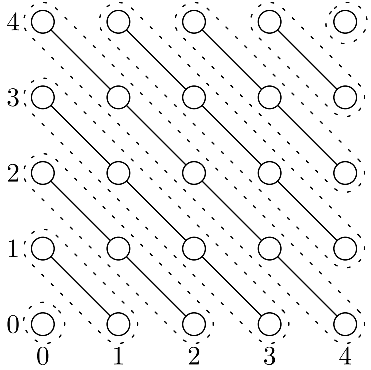
$$m+n = p+q \wedge p+q = k+l,$$

niin

$$m+n = p+q = k+l \Rightarrow m+n = k+l,$$

joten myös transitiivisuus toteutuu.

Koska kaikki kolme ehtoa toteutuivat, on $\backsim$ ekvivalenssirelaatio. Alla on relaation graafiesityksen alkuosa:



Kaaviosta nähdään, että relaation määräämät ekvivalenssiluokat vastaavat suoran $y = -x$ suuntaisia suoria.

5. **Tehtävä:** Todista induktiolla, että jos X on äärellinen joukko, jonka koko on $n = |X|$, niin sen potenssijoukon koko on $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

   Vastaus: Perustapaus: $X = \emptyset$. Tällöin $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ja $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1 = 2^0$.

   Induktio-oletus: oletetaan että on olemassa jokin $k \in \mathbb{N}$ siten, että sääntö pätee kaikille $n \leq k$.

   Induktioaskel: olkoon $|X| = k + 1$. Merkitään $X = Y \cup \{x\}$ $(x \notin Y)$. Induktio-oletuksen perusteella $|\mathcal{P}(Y)| = 2^k$. $|\mathcal{P}(X)|$:ään kuuluvat kaikki $|\mathcal{P}(Y)|$:n joukot sekä $|\mathcal{P}(Y)|$:n joukkojen unioni joukon $\{x\}$:n kanssa. Saadaan $|\mathcal{P}(X)| = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

6. **Tehtävä:** Todista induktiolla, että jokaisessa äärellisen perusjoukon S osittainjärjestyksessä on ainakin yksi minimialkio. Osoita myös esimerkein, että minimialkio ei välttämättä ole yksikäsitteinen, ja että väite ei ole yleisesti voimassa, jos perusjoukko S on ääretön.

   Vastaus: Sovelletaan induktiota S:n kokoon suhteen.

   1° Perustapaus: Tarkastellaan pienintä mahdollista ei-tyhjää joukkoa $S_1 = \{a_1\}$. Tälle on olemassa vain yksi osittaisjärjestys $R_1 = \{(a_1, a_1)\}$. (Osittaisjärjestys on refleksiivinen, antisymmetrinen ja transitiivinen binäärirelaatio).

   Joukon alkio $a \in S$ on minimialkio täsmälleen silloin, kun se ei esiinny relaatiossa oikealla puolella (refleksiivistä kaarta lukuunottamatta), formaalimmin:

   $$\forall a, b \in S : (b, a) \in R \Rightarrow a = b,$$

   Osittaisjärjestyksessä R_1 alkio a_1 täyttää ylläolevan ehdon, joten se on minimialkio.

   2° Induktio-oletus: Oletetaan, että on olemassa jokin luonnollinen luku $n > 1$, jolle pätee: kun $|S| < n$, kaikilla S:n alkioista muodostetuilla osittaisjärjestyksillä on minimialkio.

   3° Induktioaskel: Olkoon $S_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ joukko, jossa on n alkiota, ja olkoon R_n jokin (mikä tahansa) S_n:n alkioista muodostettu osittaisjärjestys. Valitaan nyt mielivaltainen alkio a_i $(1 \leq i \leq n)$, poistetaan se joukosta S_n, ja poistetaan relaatiosta kaikki siihen viittaavat parit:

   $$\begin{aligned} S'_n &= S_n - \{a_i\} \\ R'_n &= \{(a, b) \in R_n \mid a \neq a_i \wedge b \neq a_i\} \end{aligned}$$

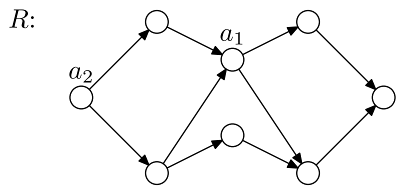
   Nyt R'_n on myös osittaisjärjestys (todista tämä, seuraa pohjimmiltaan R_n:n transitiivisuudesta). Koska joukossa S'_n on $n-1$ alkiota $(< n)$, R'_n:ssa on induktio-oletuksen perusteella ainakin yksi minimialkio, jota merkitään $a_{\min}$.

   Palataan tarkastelemaan relaatiota R_n. Nyt on olemassa kaksi mahdollista tapausta:

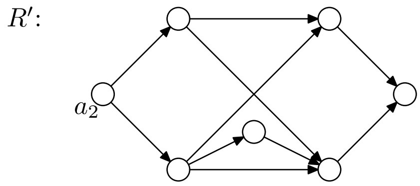
   i) Mikäli kaari $(a_i, a_{\min}) \notin R_n$, on $a_{\min}$ myös osittaisjärjestyksen R_n minimialkio, koska R_n:n ja R'_n:n ainoana erona on alkio a_i ja siihen liittyvät kaaret.

   ii) Mikäli kaari $(a_i, a_{\min}) \in R_n$, ei $a_{\min}$ voi olla minimialkio. Koska $a_{\min}$ on kuitenkin osittaisjärjestyksen R'_n minimialkio ja koska osittaisjärjestys on aina transitiivinen, relaatiossa R_n ei voi olla kaarta $(b, a_i) \in R_n, b \neq a_i$. Muussa tapauksessa myös kaari $(b, a_{\min}) \in R'_n$, eikä $a_{\min}$ olisi R'_n:n minimialkio. Näin ollen alkio a_i on R_n:n minimialkio, ja induktiotodistus saatiin valmiiksi.

Todistuksen induktioaskelta voidaan havainnollistaa tarkastelemalla seuraavaa osittaisjärjestystä (kaaviosta on jätetty selkeyden vuoksi pois refleksiiviset ja transitiiviset kaaret):



Poistetaan alkio a_1. Tällöin jäljelle jää osittaisjärjestys R':



Tämän osittaisjärjestyksen minimialkio on a_2. Koska alkuperäisessä järjestyksessä ei ole kaarta (a_1, a_2), huomataan, että a_2 on myös R:n minimi. Tämä vastaa induktioaskeleen tapausta (i). Tapaus (ii) puolestaan vastaa tilannetta, jossa poistetaan a_2.

Äärettömän perusjoukoun yli määritellyillä osittaisjärjestyksillä ei välttämättä ole minimialkoita. Yksi esimerkki on kokonaisluvut $\mathbb{Z}$ ja osittaisjärjestys $\leq$.

Yksinkertainen esimerkki osittaisjärjestyksetä, jolla on monta minimiä on:

$$R = \{(p,p), (q,q), (l,l), (q,l), (p,l)\}.$$

Relaatiossa sekä p että q ovat minimialkioita.