

Tietojenkäsittelyteorian perusteet  
Harjoitus 8  
Demonstraatiotehtävien ratkaisut

4. **Tehtävä:** Yhteydettömän kieliopin  $G = (V, \Sigma, P, S)$  välike  $A \in V - \Sigma$  on *turha*, jos se ei voi esiintyä minkään  $G$ :n tuottaman kielen lauseen johdossa, so. jos yksikään  $G$ :n johto ei ole muotoa  $S \Rightarrow^* \alpha A \beta \Rightarrow^* x$ , missä  $\alpha, \beta \in V^*$ ,  $x \in \Sigma^*$ . Laadi algoritmi, joka poistaa annetusta kieliopista turhat välikkeet. (*Vihje:* Määritä ensin tarpeelliset välikkeet.)

**Vastaus:** Halutaan poistaa kieliopista  $G = (V, \Sigma, P, S)$  tarpeettomat välikkeet.

Kootaan ensin joukoksi  $T$  ne välikkeet, jotka voivat jossain johdossa esiintyä. Tämä tehdään seuraavasti:

- (i) Asetetaan aluksi:

$$T := \{S\}.$$

- (ii) Toistetaan sitten seuraavaa laajennusta kunnes joukko  $T$  ei muutu:

$$T := T \cup \{B \in V - \Sigma \mid A \rightarrow \alpha B \beta \text{ on } G \text{:n produktio, } \alpha, \beta \in V^*, A \in T\}.$$

Koska  $|V - T|$  pienenee jokaisella askeleella, joudutaan kohtaa (ii) toistamaan korkeintaan  $|V - \Sigma| + 1$  askelta, joten algoritmi lopulta pysähtyy.

Lopuksi poistetaan kieliopista ne välikkeet, jotka eivät esiinny joukossa  $T$  (sekä niihin liittyvät produktiot). Formaalisti tämä voidaan esittää seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned} G' &= (V', \Sigma, P', S) \\ V' &= V - T \\ P' &= \{A \rightarrow \alpha \mid A \in T \wedge (A \rightarrow \alpha) \in P\} \end{aligned}$$

Tarkastellaan esimerkiksi kielioppia:

$$\begin{aligned} G &= (V, \Sigma, P, S) \\ V &= \{S, A, B, C, a, b\} \\ \Sigma &= \{a, b\} \\ P &= \{S \rightarrow aA \mid SS; \quad A \rightarrow bB \mid S \\ &\quad B \rightarrow bS; \quad C \rightarrow aS\} \end{aligned}$$

Alustetaan aluksi  $T_0 = \{S\}$ . Nyt:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_0 \cup \{A, S\} = \{A, S\} \\ T_2 &= T_1 \cup \{A, S, B\} = \{A, S, B\} \\ T_3 &= T_2 \cup \{A, S, B\} = \{A, S, B\} . \end{aligned}$$

Ainoaksi tarpeettomaksi välikkeeksi jää  $C$ .

5. **Tehtävä:** Muodosta kielioppia  $G = (V, \Sigma, P, S)$  vastaava pinoautomaatti, kun

$$\begin{aligned} V &= \{S, (, ), *, \cup, \emptyset, a, b\} \\ \Sigma &= \{(, ), *, \cup, \emptyset, a, b\} \\ P &= \{S \rightarrow (SS), S \rightarrow S^*, S \rightarrow (S \cup S), \\ &\quad S \rightarrow \emptyset, S \rightarrow a, S \rightarrow b\} \end{aligned}$$

**Vastaus:** Mitä tahansa yhteydetöntä kielioppia  $G = (V, \Sigma, R, S)$  vastaava epädeterministinen pinoautomaatti  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$  voidaan laatia seuraavasti:

$$Q = \{q_0, q_1, q_{\text{acc}}\}$$

$$\Gamma = V \cup \{\perp\}$$

$$F = \{q_{\text{acc}}\}$$

$$\delta = \{((q_0, \varepsilon, \varepsilon), (q_1, S\perp)), ((q_1, \perp, \varepsilon), (q_{\text{acc}}, \varepsilon))\} \quad (1)$$

$$\cup \{((q_1, \varepsilon, A), (q_1, \alpha)) \mid (A \rightarrow \alpha) \in P\} \quad (2)$$

$$\cup \{((q_1, \sigma, \sigma), (q_1, e)) \mid \sigma \in \Sigma\} \quad (3)$$

Tässä symbolia  $\perp$  käytetään pinon pohjan merkinä.

Tehtävän kieliopille konstruktio tuottaa seuraavan pinoautomaatin:

$$Q = \{q_0, q_1, q_{\text{acc}}\}$$

$$\Sigma = \{(\cdot), *, \cup, \emptyset, a, b\}$$

$$\Gamma = \{S, (\cdot), *, \cup, \emptyset, a, b, \perp\}$$

$$F = \{q_{\text{acc}}\}$$

$$\delta = \{((q_0, e, e), (q_1, S\perp)), ((q_1, \perp, e), (q_{\text{acc}}, e)), ((q_1, e, S), (q_1, (SS))),$$

$$((q_1, e, S), (q_1, S^*)), ((q_1, e, S), (q_1, (S \cup S))), ((q_1, e, S), (q_1, \emptyset)),$$

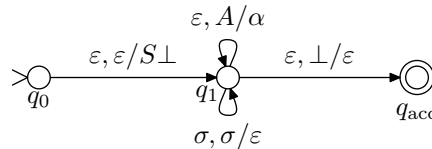
$$((q_1, e, S), (q_1, a)), ((q_1, e, S), (q_1, b)),$$

$$((q_1, (\cdot, \cdot), (q_1, e)), ((q_1, (\cdot, \cdot)), (q_1, e)), ((q_1, *, *), (q_1, e)),$$

$$((q_1, \cup, \cup), (q_1, e)), ((q_1, \emptyset, \emptyset), (q_1, e)), ((q_1, a, a), (q_1, e)),$$

$$((q_1, b, b), (q_1, e))\}$$

Syntynyt automaatti on muotoa:



Tarkastellaan, miten automaatti käsittelee syötteen  $(a \cup b^*)$ :

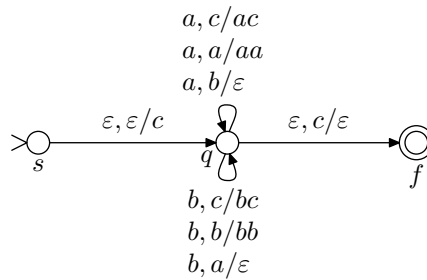
Tila	Syöte	Pino	
$q_0$	$(a \cup b^*)$	$\varepsilon$	
$q_1$	$(a \cup b^*)$	$S\perp$	(1)
$q_1$	$(a \cup b^*)$	$(S \cup S)\perp$	(2) $(S \rightarrow (S \cup S))$
$q_1$	$a \cup b^*$	$S \cup S)\perp$	(3)
$q_1$	$a \cup b^*$	$a \cup S)\perp$	(2) $(S \rightarrow a)$
$q_1$	$\cup b^*$	$\cup S)\perp$	(3)
$q_1$	$b^*$	$S^*)\perp$	(2) $(S \rightarrow S^*)$
$q_1$	$b^*$	$b^*)\perp$	(2) $(S \rightarrow b)$
$q_1$	$*$	$*)\perp$	(3)
$q_1$	$)$	$)\perp$	(3)
$q_1$	$\varepsilon$	$\perp$	(3)
$q_{\text{acc}}$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	(1)

Huom. kieli  $L(G)$  määrittelee kaikki syntaktisesti oikeanmuotoiset aakkoston  $\Sigma = \{a, b\}$  yli muodostetut säännölliset lausekkeet.

6. **Tehtävä:** Muodosta pinoautomaattia  $M$  vastaava kielioppi, missä  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ :

$$\begin{aligned} Q &= \{s, q, f\} \\ \Sigma &= \{a, b\} \\ \Gamma &= \{a, b, c\} \\ F &= \{f\} \\ \delta &= \{((s, e, e), (q, c)), ((q, a, c), (q, ac)), ((q, a, a), (q, aa)) \\ &\quad ((q, a, b), (q, e)), ((q, b, c), (q, bc)), ((q, b, b), (q, bb)) \\ &\quad ((q, b, a), (q, e)), ((q, e, c), (f, e))\} \end{aligned}$$

**Vastaus:** Tilakaaviona  $M$  näyttää seuraavalta:



Pinoautomaattia vastaavan yhteydettömän kieliopin selvittäminen on suhteellisen työlästä. Tässä käytetään algoritmia, jotka toimii vain *yksinkertaisille* pinoautomaateille. Pinoautomaatti on yksinkertainen, mikäli seuraavat ehdot toteutuvat:

- Jos  $((q, u, \beta), (p, \gamma))$  on pinoautomaatin siirtymä, niin  $|\beta| \leq 1$ .
- Jos  $((q, u, e), (p, \gamma)) \in \delta$ , niin myös  $((q, u, A), (p, \gamma A)) \in \delta$  kaikille  $A \in \Gamma$ .

Rajoitukset eivät kuitenkaan heikennä pinoautomaattien ilmaisuvoimaa, sillä mikä tahansa pinoautomaatti voidaan muuttaa yksinkertaiseksi (yksityiskohdat sivuutetaan tässä).

Kieliopin muodostamisen ajatuksena on ottaa kielen väliskeiksi kolmikkoja  $\langle q, A, p \rangle$ , missä  $q, p \in Q$  ja  $A \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$ . Ajatuksena on, että  $\langle q, A, p \rangle$  generoi kaikki ne merkkijonot, joita tutkiessaan automaatti siirtyisi tilasta  $q$  tilaan  $p$  poistaen samalla pinosta symbolin  $A$ .

Kieliopin sääntöjä on neljänlaisia:

1. Kaikille  $f \in F$  asetetaan sääntö  $S \rightarrow \langle s, \varepsilon, f \rangle$ .
2. Kaikille siirtymille  $((q, u, A), (r, B_1 \cdots B_n)) \in \delta$ , missä  $q, r \in Q, u \in \Sigma^*, n > 0, A \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$  ja  $B_1 \cdots B_n \in \Gamma$ , lisätään sääntö

$$\langle q, A, p \rangle \rightarrow u \langle r, B_1, q_1 \rangle \langle q_1, B_2, q_2 \rangle \cdots \langle q_{n-1}, B_n, p \rangle$$

kaikille  $p, q_1, \dots, q_{n-1} \in Q$ .

3. Kaikille siirtymille  $((q, u, A), (r, \varepsilon)) \in \delta$ , missä  $q, r \in Q, u \in \Sigma^*$  ja  $A \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$ , lisätään sääntö

$$\langle q, A, p \rangle \rightarrow u \langle r, \varepsilon, p \rangle$$

4. Kaikille  $q \in Q$  lisätään sääntö  $\langle q, \varepsilon, q \rangle \rightarrow \varepsilon$ .

Säännöistä ensimmäinen ilmaisee, että tarkoituksena on päästä alkutilasta johonkin lopputilaan niin, että pino jää lopuksi tyhjäksi. Viimeistä muotoa olevat säännöt kertovat, että mitään laskentaa ei tarvita, ellei siirrytä toiseen tilaan. Muotoa 2 olevat säännöt kuvaavat pitkää suoritusta, jolla siirrytään tilasta  $q$  tilaan  $p$  ja samalla poistetaan  $A$  pinosta.

Säännön oikea puoli konstruoi automaatin tilasiirtymien jonon siirtymä kerrallaan. Muotoa 3 olevat säännöt ovat analogisia muotoa 2 olevien sääntöjen kanssa.

Kielioppi  $G = (V, \Sigma, P, S)$ ,  $V = \Sigma \cup \{S\} \cup \{\langle q, A, p \rangle \mid q, p \in Q, A \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}\}$

$$P = \{S \rightarrow \langle s, e, f \rangle, \quad (1.)$$

$$\langle s, \varepsilon, s \rangle \rightarrow \varepsilon, \langle q, \varepsilon, q \rangle \rightarrow \varepsilon, \langle f, \varepsilon, f \rangle \rightarrow \varepsilon, \quad (4.)$$

$$\langle s, \varepsilon, s \rangle \rightarrow \varepsilon \langle q, c, s \rangle, \quad (2./tr.1)$$

$$\langle s, \varepsilon, q \rangle \rightarrow \varepsilon \langle q, c, q \rangle, \quad (2./tr.1)$$

$$\langle s, \varepsilon, f \rangle \rightarrow \varepsilon \langle q, c, f \rangle, \quad (2./tr.1)$$

$$\langle q, c, s \rangle \rightarrow a \langle q, a, s' \rangle \langle s', c, s \rangle \quad (2./tr.2)$$

$$\langle q, c, q \rangle \rightarrow a \langle q, a, q' \rangle \langle q', c, q \rangle \quad (2./tr.2)$$

$$\langle q, c, f \rangle \rightarrow a \langle q, a, f' \rangle \langle f', c, f \rangle \quad (2./tr.2)$$

$$\langle q, a, s \rangle \rightarrow a \langle q, a, s' \rangle \langle s', a, s \rangle \quad (2./tr.3)$$

$$\langle q, a, q \rangle \rightarrow a \langle q, a, q' \rangle \langle q', a, q \rangle \quad (2./tr.3)$$

$$\langle q, a, f \rangle \rightarrow a \langle q, a, f' \rangle \langle f', a, f \rangle \quad (2./tr.3)$$

$$\langle q, b, s \rangle \rightarrow a \langle q, \varepsilon, s \rangle \quad (3./tr.4)$$

$$\langle q, b, q \rangle \rightarrow a \langle q, \varepsilon, q \rangle \quad (3./tr.4)$$

$$\langle q, b, f \rangle \rightarrow a \langle q, \varepsilon, f \rangle \quad (3./tr.4)$$

$$\langle q, c, s \rangle \rightarrow b \langle q, b, s' \rangle \langle s', c, s \rangle \quad (2./tr.5)$$

$$\langle q, c, q \rangle \rightarrow b \langle q, b, q' \rangle \langle q', c, q \rangle \quad (2./tr.5)$$

$$\langle q, c, f \rangle \rightarrow b \langle q, b, f' \rangle \langle f', c, f \rangle \quad (2./tr.5)$$

$$\langle q, b, s \rangle \rightarrow b \langle q, b, s' \rangle \langle s', b, s \rangle \quad (2./tr.6)$$

$$\langle q, b, q \rangle \rightarrow b \langle q, b, q' \rangle \langle q', b, q \rangle \quad (2./tr.6)$$

$$\langle q, b, s \rangle \rightarrow b \langle q, b, f' \rangle \langle f', b, f \rangle \quad (2./tr.6)$$

$$\langle q, a, s \rangle \rightarrow b \langle q, \varepsilon, s \rangle \quad (3./tr.7)$$

$$\langle q, a, q \rangle \rightarrow b \langle q, \varepsilon, q \rangle \quad (3./tr.7)$$

$$\langle q, a, f \rangle \rightarrow b \langle q, \varepsilon, f \rangle \quad (3./tr.7)$$

$$\langle q, c, s \rangle \rightarrow \varepsilon \langle f, \varepsilon, s \rangle \quad (3./tr.8)$$

$$\langle q, c, q \rangle \rightarrow \varepsilon \langle f, \varepsilon, q \rangle \quad (3./tr.8)$$

$$\langle q, c, f \rangle \rightarrow \varepsilon \langle f, \varepsilon, f \rangle \quad (3./tr.8)$$

Näistä säännöistä suuri osa on tarpeettomia. Tarvittavat saadaan selville lähtemällä liikkeelle säännöstä  $S \rightarrow \langle s, \varepsilon, f \rangle$ , ja katsomalla, mitä kaikkia sääntöjä voidaan käyttää.

Tuloksena syntyvät säännöt ovat

$$\begin{aligned}
P = \{ & S \rightarrow \langle s, \varepsilon, f \rangle \\
& \langle s, \varepsilon, f \rangle \rightarrow \langle q, c, f \rangle \\
& \langle q, c, f \rangle \rightarrow a \langle q, a, q \rangle \langle q, c, f \rangle \\
& \langle q, c, f \rangle \rightarrow b \langle q, b, q \rangle \langle q, c, f \rangle \\
& \langle q, c, f \rangle \rightarrow \langle f, \varepsilon, f \rangle \\
& \langle q, a, q \rangle \rightarrow a \langle q, a, q \rangle \langle q, a, q \rangle \\
& \langle q, a, q \rangle \rightarrow b \langle q, \varepsilon, q \rangle \\
& \langle q, b, q \rangle \rightarrow b \langle q, b, q \rangle \langle q, b, q \rangle \\
& \langle q, b, q \rangle \rightarrow a \langle q, \varepsilon, q \rangle \\
& \langle q, \varepsilon, q \rangle \rightarrow \varepsilon \\
& \langle f, \varepsilon, f \rangle \rightarrow \varepsilon \}
\end{aligned}$$

Kielioppia voi vielä sieventää. Merkitään  $\langle q, c, f \rangle = S$ ,  $\langle q, b, q \rangle = B$ ,  $\langle q, a, q \rangle = A$ , ja tulokseksi saadaan

$$\begin{aligned}
P = \{ & S \rightarrow aAS \mid bBS \mid \varepsilon \\
& A \rightarrow aAA \mid b, \\
& B \rightarrow bBB \mid a \}
\end{aligned}$$

### Liite: Chomskyn normaalimuoto ja CYK-algoritmi

Muutetaan vielä viimeisen tehtävän kielioppi Chomskyn normaalimuotoon ja tarkistetaan CYK-algoritmillä kuuluvatko sanat *abb* ja *abba* kieleen  $L(G)$ .

Kielioppi on Chomskyn normaalimuodossa, mikäli seuraavat ehdot toteutuvat:

1. Ainoastaan alkuvälike  $S$  voi olla tyhjentyvä.
2. Mahdollisesti esiintyvää sääntöä  $S \rightarrow \varepsilon$  lukuunottamatta kaikki säännöt ovat muotoa  $A \rightarrow BC$  tai  $A \rightarrow a$ , missä  $A, B$  ja  $C$  ovat välikkeitä ja  $a$  terminaalisyntoli.

Kielioppi muutetaan normaalimuotoon vaiheittain:

#### 1. Poistetaan lähtösymboli sääntöjen oikealta puolelta.

Koska kieliopissa on säännöt  $S \rightarrow aAS$  ja  $S \rightarrow bBS$ , lisätään uusi lähtösymboli  $S'$  ja sääntö  $S' \rightarrow S$ . Saadaan tulokseksi sääntöjoukko:

$$\begin{aligned}
& S' \rightarrow S, \\
& S \rightarrow aAS \mid bBS \mid \varepsilon \\
& A \rightarrow aAA \mid b, \\
& B \rightarrow bBB \mid a
\end{aligned}$$

#### 2. Poistetaan $\varepsilon$ -produktiot.

Koska Chomskyn normaalimuodossa ainoastaan lähtösymboli  $S'$  saa olla tyhjentyvä, täytyy muut  $\varepsilon$ -säännöt poistaa kieliopista. Lasketaan aluksi tyhjentyvien välikkeiden joukko NULL:

$$\begin{aligned}
\text{NULL}_0 &= \{S\} & (S \rightarrow \varepsilon) \\
\text{NULL}_1 &= \{S, S'\} & (S' \rightarrow S) \\
\text{NULL}_2 &= \{S, S'\} = \text{NULL}
\end{aligned}$$

Tämän jälkeen korvataan säännöt  $A \rightarrow X_1 \cdots X_n$  joukolla sääntöjä

$$A \rightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_2, \quad \text{missä } \alpha_i = \begin{cases} X_i, X_i \notin \text{NULL} \\ X_i \text{ tai } \varepsilon, X_i \in \text{NULL} \end{cases}$$

Lopuksi poistetaan kaikki säännöt muotoa  $A \rightarrow \varepsilon$  (lukuunottamatta sääntöä  $S' \rightarrow \varepsilon$ ).  
Saadaan tulokseksi sääntöjoukko<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow S \mid \varepsilon \\ S &\rightarrow aAS \mid aA \mid bBS \mid bB \\ A &\rightarrow aAA \mid b, \\ B &\rightarrow bBB \mid a \end{aligned}$$

### 3. Poistetaan yksikköproduktiot.

Seuraavaksi poistetaan kieliopista kaikki muotoa  $A \rightarrow B$  olevat säännöt, missä sekä  $A$  että  $B$  ovat välitteitä.

Lasketaan ensin joukot  $F(A)$  kaikilla  $A \in V - \Sigma$ :

$$\begin{aligned} F(A) &= F(B) = F(S) = \emptyset \\ F(S') &= \{S\} \end{aligned}$$

Välike  $B$  kuuluu joukkoon  $F(A)$  täsmälleen silloin, kun  $A$ :sta voidaan johtaa  $B$  käyttäen pelkkiä yksikköproduktioita.

Sääntö  $A \rightarrow B$  korvataan sääntöjoukolla  $\{A \rightarrow w \mid \exists C \in F(B) \cup \{B\} : C \rightarrow w \in P\}$ .  
Tulokseksi saadaan sääntöjoukko:

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow aAS \mid aA \mid bBS \mid bB \mid \varepsilon \\ S &\rightarrow aAS \mid aA \mid bBS \mid bB \\ A &\rightarrow aAA \mid b, \\ B &\rightarrow bBB \mid a \end{aligned}$$

### 4. Poistetaan liian pitkät produktiot.

Viimeisessä vaiheessa lisätään kielioppiin uusi välike  $C_\sigma$  sekä sääntö  $C_\sigma \rightarrow \sigma$  kaikille  $\sigma \in \Sigma$  sekä jaetaan kaikki säännöt  $A \rightarrow w$  ( $|w| > 2$ ) ketjuksi sääntöjä, jotka kaikki johtavat tismalleen kaksi symbolia.

Annetun kieliopin Chomskyn normaalimuodoksi saadaankin seuraava sääntöjoukko:

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow C_a S'_1 \mid C_a A \mid C_b S'_2 \mid C_b B \mid \varepsilon \\ S'_1 &\rightarrow AS \\ S'_2 &\rightarrow BS \\ S &\rightarrow C_a S_1 \mid C_a A \mid C_b S_2 \mid C_b B \\ S_1 &\rightarrow AS \\ S_2 &\rightarrow BS \\ A &\rightarrow C_a A_1 \mid b \\ A_1 &\rightarrow AA \\ B &\rightarrow C_a B_1 \mid a \\ B_1 &\rightarrow BB \\ C_a &\rightarrow a \\ C_b &\rightarrow b \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Tarkkaan ottaen tässä vaiheessa pitäisi lisätä vielä uusi aloitusvälike  $S''$  ja säännöt  $S'' \rightarrow \varepsilon \mid S'$ , mutta tässä tapauksessa ei synny ongelmia, vaikka käytetään  $S'$ :a lähtösymbolina.

CYK-algoritmillä voidaan tutkia kuuluuko sana  $x = x_1 \cdots x_n$  kieliopin  $G$  määrittelemään kieleen. Algoritmin kuluessa lasketaan välilijoukot  $N_{i,j}$ . Joukko  $N_{i,j}$  käsittää kaikki ne välilijoukot, joilla voidaan johtaa alimerkkijono  $x_i \cdots x_j$ . Joukkojen laskemisessa voidaan käyttää apuna dynaamista ohjelmointia seuraavaan tapaan:

$$N_{i,i} = \{A \mid (A \rightarrow x_i) \in P\}$$

$$N_{i,i+k} = \{A \mid \exists B, C \in V - \Sigma \text{ s.e. } (A \rightarrow BC) \in P \text{ ja} \\ \exists j : i \leq j < i+k \text{ s. e. } B \in N_{i,j} \wedge C \in N_{j+1,i+k}\}$$

Tarkastellaan yllä saatua kielioppia ja sanaa *abba*. Lasketaan ensin joukot  $N_{i,i}$ ,  $i \leq 4$ :

		$i \rightarrow$			
	$N_{i,i+k}$	$1 : a$	$2 : b$	$3 : b$	$4 : a$
$k \downarrow$	0	<u>abba</u> {B, C <sub>a</sub> }	<u>abba</u> {A, C <sub>b</sub> }	<u>abba</u> {B, C <sub>a</sub> }	<u>abba</u> {A, C <sub>b</sub> }

Kussakin taulukon ruudussa on merkittynä, mitä sanan osajonoa ruutu vastaa.

Lasketaan seuraavaksi  $N_{1,2}$ . Nyt ainoa mahdollinen  $j = 1$ , joten tarkastellaan joukkoja  $N_{1,1} = \{B, C_a\}$  ja  $N_{2,2} = \{A, C_b\}$ . Ainoat muotoa  $A \rightarrow BC$ ,  $B \in N_{1,1}$  ja  $C \in N_{2,2}$ , olevat säännöt ovat:  $\{S' \rightarrow C_a A, S \rightarrow C_a A\}$ , joten  $N_{1,2} = \{S', S\}$ . Samaan saadaan laskettua joukoiksi  $N_{2,3} = \{A_1\}$  ja  $N_{3,4} = \{S', S\}$ , joten taulukon toiseksi riviksi muodostuu:

		$i \rightarrow$			
	$N_{i,i+k}$	$1 : a$	$2 : b$	$3 : b$	$4 : a$
$k \downarrow$	0	<u>abba</u> {B, C <sub>a</sub> }	<u>abba</u> {A, C <sub>b</sub> }	<u>abba</u> {B, C <sub>a</sub> }	<u>abba</u> {A, C <sub>b</sub> }
	1	<u>abba</u> {S', S}	<u>abba</u> {A <sub>1</sub> }	<u>abba</u> {S', S}	

Ruudun  $N_{1,3}$  kohdalla täytyy tarkastella kahta eri vaihtoehtoa,

$$j = 1 \Rightarrow N_{1,1} = \{C_a, B\} \quad j = 2 \Rightarrow N_{1,2} = \{S', S\}$$

$$N_{2,3} = \{A_1\} \quad N_{3,3} = \{C_b, A\}$$

Tapausta  $j = 1$  vastaava välilijoukko on  $\{A\}$  ( $A \rightarrow C_a A_1$ ) ja tapausta  $j = 2$  vastaava on  $\emptyset$ , joten  $N_{1,3} = \{A\}$ . Samaan tapaan jatkamalla saadaan lopulta koko taulukoksi:

		$i \rightarrow$			
	$N_{i,i+k}$	$1 : a$	$2 : b$	$3 : b$	$4 : a$
$k \downarrow$	0	<u>abba</u> {B, C <sub>a</sub> }	<u>abba</u> {A, C <sub>b</sub> }	<u>abba</u> {B, C <sub>a</sub> }	<u>abba</u> {A, C <sub>b</sub> }
	1	<u>abba</u> {S', S}	<u>abba</u> {A <sub>1</sub> }	<u>abba</u> {S', S}	
	2	<u>abba</u> {A}	<u>abba</u> {S' <sub>1</sub> , S <sub>1</sub> }		
	3	<u>abba</u> {S', S, A <sub>1</sub> }			

Koska  $S' \in N_{1,4}$ , niin  $abba \in L(G)$ . Sitä vastoin  $S' \notin N_{1,3}$ , joten  $abb \notin L(G)$ .