T-79.148 **Kevät 2002**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Harjoitus 9
Demonstraatiotehtävien ratkaisut

4. **Tehtävä**: Osoita, että yhteydettömien kielten luokka ei ole suljettu leikkausten eikä komplementtien suhteen. (*Vihje:* Esitä kieli $\{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}$ kahden yhteydettömän kielen leikkauksena.)

   Vastaus: Olkoon kieli $L = \{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}$. Tämä kieli on osoitettu yhteydettömäksi (opetusmoniste s. 72). Osoitetaan että yhteydettömät kielet eivät ole suljettuja leikkauksen suhteen esittämällä L:n kahden yhteydettömän kielen leikkauksena.

   Olkoon $L_1 = \{a^* b^k c^k \mid k \geq 0\}$ ja $L_2 = \{a^k b^k c^* \mid k \geq 0\}$. Nyt sekä L_1 että L_2 ovat yhteydettömiä, mutta $L = L_1 \cap L_2$, joten yhteydettömät kielet eivät ole suljettuja leikkauksen suhteen.

   Tuloksesta seuraa suoraan se, että yhteydettömät kielet eivät voi olla suljettuja komplementin suhteen, sillä ne ovat suljettuja unionin suhteen ja DeMorganin sääntöjen perusteella $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$.

   Osoitetaan vielä lopuksi, että L_1 ja L_2 ovat todellakin yhteydettömiä muodostamalla niitä vastaavat kieliopit. Kielen L_1 generoi yhteydetön kielioppi $G_1 = (\{S, A, B, a, b, c\}, \{a, b, c\}, P_1, S)$, missä $P_1 = \{S \to AB, A \to aA \mid \varepsilon, B \to bBc \mid \varepsilon\}$. Kielen L_2 generoiva kielioppi $G_2 = (\{S, A, B, a, b, c\}, \{a, b, c\}, P_2, S)$, $P_2 = \{S \to AB, A \to aAb \mid \varepsilon, B \to cB \mid \varepsilon\}$.

5. **Tehtävä**: Laadi standardimalliset Turingin koneet NEXT ja DUP, jotka suorittavat seuraavat tehtävät:

   (a) NEXT korvaa nauhalla olevan merkkijonon kanonisessa (leksikografisessa) järjestyksessä seuraavalla;

   (b) DUP kirjoittaa nauhalla olevan merkkijonon perään sen kopion (esim. jono *abb* korvataan jonolla *abbabb*).

   Vastaus:

   (a) Joukon Σ^* yli muodostettava leksikografinen järjestys $<_L$ määritellään käyttäen apuna aakkoston Σ alkioiden välille määriteltyä järjestystä $<$. Yleensä järjestyksenä $<$ käytetään joko aakkosjärjestystä tai numerojärjestystä. Esim:

   $$\begin{aligned} &\text{Jos } \Sigma = \{a, \ldots, z\}, \text{ niin } a < b < c < \cdots < z \\ &\text{Jos } \Sigma = \{0, 1\}, \text{ niin } 0 < 1 \end{aligned}$$

   Leksikografinen järjestys $<_L$ määritellään seuraavasti: Olkoon $x, y \in \Sigma^*$, $x = x_1 \cdots x_n$ ja $y = y_1 \cdots y_m$. Nyt $x <_L y$ mikäli toinen alla olevista ehdoista toteutuu:

   (i) $n < m$, tai

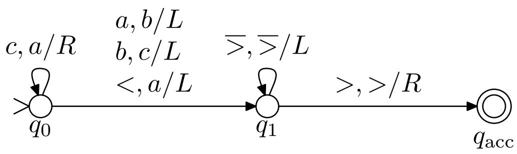
   (ii) $n = m$ ja on olemassa $i \leq n$ siten, että $x_i < y_i$ ja kaikilla $j < i$, $x_i = y_i$.

   Esimerkiksi aakkoston $\{0, 1\}$ sanojen leksikografinen järjestys on seuraavanlainen:

   $$\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, \ldots$$

   Ratkaisussa laaditaan Turingin kone, joka toimii aakkostolla $\Sigma = \{a, b, c\}$. Ratkaisun voi kuitenkin yleistää mille tahansa aakkostolle (yksityiskohdat liitteessä). Jotta ratkaisu olisi yksinkertaisempi, niin oletetaan myös että merkkijono on nauhalla käänteisenä, eli merkkijonon vähiten merkitsevä kirjain on ensimmäisenä:

NEXT:



Tilassa q_1 on käytetty lyhennysmerkintää $\overline{>}$ tarkoittamaan mitä tahansa muuta merkkiä kuin $>$. Kone toimii siten, että tilassa q_0 muutetaan kaikki sanan vähiten merkitsevässä päässä olevat c-kirjaimet a-kirjaimiksi. Kun löydetään ensimmäinen kirjain $\sigma < c$, korvataan se aakkosjärjestyksessä seuraavalla kirjaimella, siirretään lukupää takaisin nauhan alkuun ja pysähdytään. (Lukupään palauttamisen tarkoituksena on tehdä Turingin koneiden yhdistämisestä helpompaa).

Tarkastellaan, miten kone hakee seuraajan merkkijonolle $bacc$:

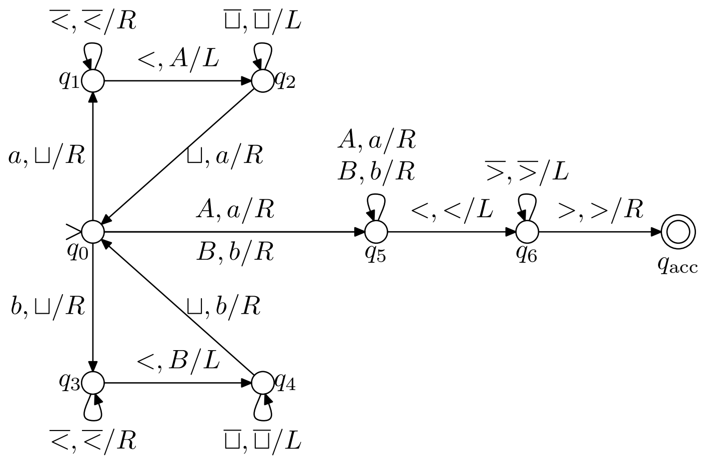
$$
\begin{aligned}
(q_0, \underline{c}cab) &\vdash (q_0, a\underline{c}ab) \vdash (q_0, aa\underline{a}b) \vdash (q_1, a\underline{a}bb) \\
&\vdash (q_1, \underline{a}abb) \vdash (q_1, \underline{>}aabb) \vdash (q_{\text{acc}}, \underline{a}abb)
\end{aligned}
$$

Tulokseksi saattin $bbaa$, niin kuin pitikin.

(b) Tässä esitetään ratkaisu aakkostolla $\Sigma = \{a, b\}$. Ratkaisun yleistäminen muille aakkostoille on hyvin suoraviivaista ja sen yksityiskohdat sivuutetaan.

Ratkaisun periaate on seuraava. Sana kopioidaan yksi merkki kerrallaan nauhan loppuun. Laskennan kulusta pidetään kirjaa korvaamalla kulloinkin kopioitava merkki symbolilla $\sqcup$. Sanan kopio kirjoitetaan ensin isoilla kirjaimilla $\{A, B\}$, koska muuten ei voitaisi huomata, milloin sana loppuu ja kopio alkaa. Lopuksi korvataan isot kirjaimet pienillä ja palautetaan lukupää nauhan alkuun.

DUP:



Tarkastellaan, miten kone toimii syötteellä abb:

$$
\begin{aligned}
(q_0, \underline{a}bb) &\vdash (q_1, \sqcup\underline{b}b) \vdash^* (q_1, \sqcup bb\underline{<}) \vdash (q_2, \sqcup b\underline{b}A) \vdash^* (q_2, \underline{\sqcup}bbA) \vdash (q_0, a\underline{b}bA) \\
&\vdash (q_3, a\sqcup\underline{b}A) \vdash^* (q_3, a\sqcup bA\underline{<}) \vdash (q_4, a\sqcup b\underline{A}B) \vdash^* (q_0, ab\underline{b}AB) \\
&\vdash^* (q_0, abb\underline{A}BB) \vdash (q_5, abba\underline{B}B) \vdash^* (q_5, abbabb\underline{<}) \vdash^* (q_{\text{acc}}, \underline{a}bbabb)
\end{aligned}
$$

Liite: ratkaisun 5a yleistäminen

Olkoon annettuna äärellinen aakkosto Σ ja täysjärjestys $< \subseteq \Sigma \times \Sigma$. Koska Σ on äärellinen, on $<$ hyvin järjestetty, joten sillä on olemassa sekä minimi $a_{\min}$ ja maksimi $a_{\max}$. Määritellään seuraajafunktio $f : (\Sigma - \{a_{\max}\}) \to \Sigma$ seuraavasti:

$$f(a) = b \Leftrightarrow a < b \wedge \neg\exists c : a < c \wedge c < b$$

Koska $<$ on täysjärjestys, on $f(a)$:n arvo yksikäsitteinen.

Syötettä x leksikografisesti seuraavan syötteen laskeva Turingin kone $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\mathrm{acc}}, q_{\mathrm{rej}})$ määritellään seuraavasti:

$$\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_1, q_{\mathrm{acc}}, q_{\mathrm{rej}}\} \\
\Gamma &= \Sigma \\
\delta &= \{(q_0, a_{\max}, q_0, a_{\min}, R), (q_0, <, q_1, a_{\min}, L)\} \\
&\quad \cup \{(q_0, a, q_1, f(a), L) \mid a \in (\Sigma - \{a_{\max}\})\} \\
&\quad \cup \{(q_1, a, q_1, a, L) \mid a \in (\Sigma \cup \{<\})\} \\
&\quad \cup \{(q_1, >, q_{\mathrm{acc}}, >, R)\}
\end{aligned}$$

Tehtävän 5a ratkaisussa esitetty Turingin kone saadaan suoraan ylläolevasta määrittelystä asettamalla $a_{\min} = a$, $a_{\max} = c$, $f(a) = b$ ja $f(b) = c$.