

Tietojenkäsittelyteorian perusteet  
Harjoitus 2, 27.–29.1. Tehtävät

**Kotitehtävät:**

1. Olkoon  $\Sigma = \{a, b\}$ . Anna esimerkkejä merkkijonoista, jotka kuuluvat seuraaviin kieliin (vähintään kolme esimerkkiä kussakin kohdassa).
  - (a)  $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ sisältää parillisen määrän } a\text{:ta ja kolmella jaollisen määrän } b\text{:tä}\};$
  - (b)  $\{a^{2n}b^{3m} \mid n, m \geq 0\};$
  - (c)  $\{uvw^Rv^R \mid u, v \in \Sigma^*\};$
  - (d)  $\{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^* \text{ s.e. } w = uu = vvv\}.$

2. Palautetaan mieliin luennolla esitetty merkkijonon  $w \in \Sigma^*$  käänteisjonon  $w^R$  induktiivinen määritelmä:

- (i)  $\varepsilon^R = \varepsilon;$
- (ii) jos  $w = ua$ , missä  $u \in \Sigma^*$  ja  $a \in \Sigma$ , niin  $w^R = au^R.$

Luennolla osoitettiin, että kaikille  $u, v \in \Sigma^*$  on voimassa  $(uv)^R = v^Ru^R$ . Osoita samaan tapaan, täsmällisesti määritelmään perustuvalla induktiolla, seuraavat tulokset:

- (a)  $(w^R)^R = w;$
- (b)  $(w^k)^R = (w^R)^k$ , kaikilla  $k \geq 0.$

3. Osoita, että kahden numeroituvasti äärettömän joukon yhdiste on numeroituvasti ääretön. Päättele tästä induktiolla, että sama pätee  $n$ :n numeroituvasti äärettömän joukon yhdisteelle,  $n = 1, 2, \dots$  (*Lisäkysymys:* Päteekö väite edelleen, jos yhdistettäviä joukkoja on numeroituvasti ääretön määrä, esim. tapauksessa  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$ , missä kukin  $A_i$  on numeroituvasti ääretön?)

**Demonstraatiotehtävät:**

4. Osoita, että mikä tahansa vähintään kaksimerkkinen aakkosto  $\Sigma$  on samanveroinen binääri-aakkoston  $\Gamma = \{0, 1\}$  kanssa siinä mielessä, että  $\Sigma$ :n merkkijonot voidaan helposti koodata  $\Gamma$ :n merkkijonoiksi ja kääntäen. Miten paljon merkkijonon pituus voi muuttua suunnittelemassasi koodauksessa? (Siis jos merkkijonon  $w \in \Sigma^*$  pituus on  $|w| = n$  merkkiä, mikä on sen vastinjonon  $w' \in \Gamma^*$  pituus?) Onnistuisiko vastaava koodaus, jos kohdeaakkostossa olisikin vain *yksi* merkki, esim.  $\Gamma = \{1\}$ ?
5. Osoita, että karteeminen tulo  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  on numeroituvasti ääretön. (*Vihje:* Ajattele parit  $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  sijoitetuiksi euklidiseen  $(x, y)$ -tasoon  $\mathbb{R}^2$ . Numeroi parit suoran  $y = -x$  suuntaisiin vinorivein.) Päättele tämän tuloksen perusteella, että myös rationaalilukujen joukko  $\mathbb{Q}$  on numeroituvasti ääretön.
6. Olkoon  $S$  mielivaltainen epätyhjä joukko.
  - (a) Muodosta jokin injektiivinen funktio  $f : S \rightarrow \mathcal{P}(S).$
  - (b) Osoita, että ei ole mahdollista muodostaa injektiota  $g : \mathcal{P}(S) \rightarrow S.$  (*Vihje:* Oletetaan, että tällainen injektio  $g$  olisi olemassa. Tarkastellaan joukkoa  $R = \{s \in S \mid s \notin g^{-1}(s)\}$  ja merkitään  $r = g(R).$  Onko tällöin  $r \in R?$ )

Totea (b)-kohdan seurauksena, että mikä tahansa numeroituvasti äärettömän joukon  $S$  potenssijoukko on ylinumeroituva.