T-79.148 **Syksy 2004**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Harjoitus 2, 28.–29.9.
Tehtävät

Muista ilmoittautua kurssille TOPI-järjestelmän kautta 1.10. mennessä. Ilmoittautuminen on pakollista.

Kotitehtävät:

1. Olkoon $\Sigma = \{a, b\}$. Anna esimerkkejä merkkijonoista, jotka kuuluvat seuraaviin kieliin (vähintään kolme esimerkkiä kussakin kohdassa):
   (a) $\{w \in \Sigma^* \mid w$ sisältää parillisen määrän a:ta ja kolmella jaollisen määrän b:tä$\}$;
   (b) $\{a^{2n}b^{3m} \mid n, m \geq 0\}$;
   (c) $\{uvu^Rv^R \mid u, v \in \Sigma^*\}$;
   (d) $\{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^*$ s.e. $w = uu = vvv\}$.

2. Palautetaan mieliin luennolla esitetty merkkijonon $w \in \Sigma^*$ käänteisjonon w^R induktiivinen määritelmä:
   (i) $\varepsilon^R = \varepsilon$;
   (ii) jos $w = ua$, missä $u \in \Sigma^*$ ja $a \in \Sigma$, niin $w^R = au^R$.

   Luennolla osoitettiin, että kaikille $u, v \in \Sigma^*$ on voimassa $(uv)^R = v^R u^R$. Osoita samaan tapaan, täsmällisesti määritelmään perustuvalla induktiolla, seuraavat tulokset:
   (a) $(w^R)^R = w$;
   (b) $(w^k)^R = (w^R)^k$, kaikilla $k \geq 0$.

3. Osoita, että kahden numeroituvan joukon A_1 ja A_2 yhdiste $A_1 \cup A_2$ on numeroituva. Päättele tästä induktiolla, että sama pätee n:n numeroituvan joukon yhdisteelle $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, kaikilla $n \geq 2$. (*Lisäkysymys:* Päteekö väite edelleen, jos yhdistettäviä joukkoja on numeroituvasti ääretön määrä, siis tapauksessa $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, missä kukin A_i on numeroituva?)

Demonstraatiotehtävät:

4. Osoita, että mikä tahansa vähintään kaksimerkkinen aakkosto Σ on samanveroinen binääriaakkoston $\Gamma = \{0, 1\}$ kanssa siinä mielessä, että Σ:n merkkijonot voidaan helposti koodata Γ:n merkkijonoiksi ja kääntäen. Miten paljon merkkijonon pituus voi muuttua suunnittelemassasi koodauksessa? (Siis jos merkkijonon $w \in \Sigma^*$ pituus on $|w| = n$ merkkiä, mikä on sen vastinjonon $w' \in \Gamma^*$ pituus?) Onnistuisiko vastaava koodaus, jos kohdeaakkostossa olisikin vain *yksi* merkki, esim. $\Gamma = \{1\}$?

5. Osoita, että karteesinen tulo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on numeroituvasti ääretön. (*Vihje:* Ajattele parit $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sijoitetuiksi euklidiseen (x, y)-tasoon $\mathbb{R}^2$. Numeroi parit suoran $y = -x$ suuntaisin vinorivein.) Päättele tämän tuloksen perusteella, että myös rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on numeroituvasti ääretön.

6. Olkoon S mielivaltainen epätyhjä joukko.
   (a) Muodosta jokin injektiivinen funktio $f : S \to \mathcal{P}(S)$.
   (b) Osoita, että ei ole mahdollista muodostaa injektiota $g : \mathcal{P}(S) \to S$. (*Vihje:* Oletetaan, että tällainen injektio g olisi olemassa. Tarkastellaan joukkoa $R = \{s \in S \mid s \notin g^{-1}(s)\}$ ja merkitään $r = g(R)$. Onko tällöin $r \in R$?)

   Totea (b)-kohdan seurauksena, että minkä tahansa numeroituvasti äärettömän joukon S potenssijoukko on ylinumeroituva.