## 3.2 Säännölliset kielet ja yhteydettömät kieliopit

Yhteydettömillä kieliopeilla voidaan siis kuvata joitakin ei-säännöllisiä kieliä (esimerkiksi kielet $L_{\text{match}}$ ja $L_{\text{expr}}$). Osoitetaan, että myös kaikki säännölliset kielet voidaan kuvata yhteydettömillä kieliopeilla. Yhteydettömät kielet ovat siten säännollisten kielten aito yliluokka.

Yhteydetön kielioppi on *oikealle lineaarinen*, jos sen kaikki produktiot ovat muotoa $A \to aB$ tai $A \to \varepsilon$, ja *vasemmalle lineaarinen*, jos sen kaikki produktiot ovat muotoa $A \to Ba$ tai $A \to \varepsilon$.

Osoittautuu, että sekä vasemmalle että oikealle lineaarisilla kieliopeilla voidaan tuottaa täsmälleen säännölliset kielet, minkä takia näitä kielioppeja nimitetään myös yhteisesti *säännöllisiksi*. Todistetaan tässä väite vain oikealle lineaarisille kieliopeille.





**Lause 3.1** Jokainen säännöllinen kieli voidaan tuottaa oikealle lineaarisella kieliopilla.

*Todistus.* Olkoon $L$ aakkoston $\Sigma$ säännöllinen kieli, ja olkoon $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sen tunnistava (deterministinen tai epädeterministinen) äärellinen automaatti. Muodostetaan kielioppi $G_M$, jolla on $L(G_M) = L(M) = L$.

Kieliopin $G_M$ pääteaakkosto on sama kuin $M$:n syöteaakkosto $\Sigma$, ja sen välikeaakkostoon otetaan yksi välike $A_q$ kutakin $M$:n tilaa $q$ kohden. Kieliopin lähtösymboli on $A_{q_0}$, ja sen produktiot vastaavat $M$:n siirtymiä:

(i) kutakin $M$:n lopputilaa $q \in F$ kohden kielioppiin otetaan produktio $A_q \to \varepsilon$;

(ii) kutakin $M$:n siirtymää $q \xrightarrow{a} q'$ (so. $q' \in \delta(q, a)$) kohden kielioppiin otetaan produktio $A_q \to aA_{q'}$.





Konstruktion oikeellisuuden tarkastamiseksi merkitään välikkeestä $A_q$ tuotettavien päätejonojen joukkoa

$$L(A_q) = \{x \in \Sigma^* \mid A_q \underset{G_M}{\Rightarrow}^* x\}.$$

Induktiolla merkkijonon $x$ pituuden suhteen voidaan osoittaa, että kaikilla $q$ on

$$x \in L(A_q) \;\text{ joss }\; (q, x) \underset{M}{\vdash}^* (q_f, \varepsilon) \text{ jollakin } q_f \in F.$$

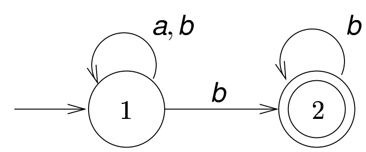
Erityisesti on siis

$$\begin{aligned} L(G_M) = L(A_{q_0}) &= \{x \in \Sigma^* \mid (q_0, x) \underset{M}{\vdash}^* (q_f, \varepsilon) \\ &\qquad \text{jollakin } q_f \in F\} \\ &= L(M) = L. \quad \square \end{aligned}$$





**Esimerkki.** Automaatti:




Vastaava kielioppi:

$$\begin{aligned} A_1 &\to aA_1 \mid bA_1 \mid bA_2 \\ A_2 &\to \varepsilon \mid bA_2. \end{aligned}$$

**Lause 3.2** Jokainen oikealle lineaarisella kieliopilla tuotettava kieli on säännöllinen.

*Todistus.* Olkoon $G = (V, \Sigma, P, S)$ oikealle lineaarinen kielioppi. Muodostetaan kielen $L(G)$ tunnistava epädeterministinen äärellinen automaatti $M_G = (Q, \Sigma, \delta, q_S, F)$ seuraavasti:

$M_G$:n tilat vastaavat $G$:n välikkeitä:

$$Q = \{q_A \mid A \in V - \Sigma\}.$$

$M_G$:n alkutila on lähtösymbolia $S$ vastaava tila $q_S$.

$M_G$:n syöteaakkosto on $G$:n pääteaakkosto $\Sigma$.

$M_G$:n siirtymäfunktio $\delta$ jäljittelee $G$:n produktioita siten, että kutakin produktiota $A \to aB$ kohden automaatissa on siirtymä $q_A \xrightarrow{a} q_B$ (so. $q_B \in \delta(q_A, a)$).





$M_G$:n lopputiloja ovat ne tilat, joita vastaaviin välikkeisiin liittyy $G$:ssä $\varepsilon$-produktio:

$$F = \{q_A \in Q \mid A \to \varepsilon \in P\}.$$

Konstruktion oikeellisuus voidaan jälleen tarkastaa induktiolla $G$:n tuottamien ja $M_G$:n hyväksymien merkkijonojen pituuden suhteen. $\square$





## 3.3 KIELIOPPIEN JÄSENNYSONGELMA

Ratkaistava tehtävä:

"Annettu yhteydetön kielioppi $G$ ja merkkijono $x$. Onko $x \in L(G)$?"

Ratkaisumenetelmä = *jäsennysalgoritmi*.

Useita vaihtoehtoisia menetelmiä, erityisesti kun $G$ on jotain rajoitettua (käytännössä esiintyvää) muotoa.





**Johdot ja jäsennyspuut**

Olkoon $\gamma \in V^*$ kieliopin $G = (V, \Sigma, P, S)$ lausejohdos.

Lähtösymbolista $S$ merkkijonoon $\gamma$ johtavaa suorien johtojen jonoa

$$S = \gamma_0 \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \gamma_n = \gamma$$

sanotaan $\gamma$:n *johdoksi* $G$:ssä.

Johdon *pituus* on siihen kuuluvien suorien johtojen määrä (edellä $n$).

Esimerkki: lauseen $a + a$ johtoja kieliopissa $G_{\mathrm{expr}}$:

$$\begin{array}{rlllllll}
\text{(i)} & E & \Rightarrow & E+T & \Rightarrow & T+T & \Rightarrow & F+T \\
 & & \Rightarrow & a+T & \Rightarrow & a+F & \Rightarrow & a+a \\
\text{(ii)} & E & \Rightarrow & E+T & \Rightarrow & E+F & \Rightarrow & T+F \\
 & & \Rightarrow & F+F & \Rightarrow & F+a & \Rightarrow & a+a \\
\text{(iii)} & E & \Rightarrow & E+T & \Rightarrow & E+F & \Rightarrow & E+a \\
 & & \Rightarrow & T+a & \Rightarrow & F+a & \Rightarrow & a+a.
\end{array}$$

Johto $\gamma \Rightarrow^* \gamma'$ on *vasen johto*, merkitään

$$\gamma \underset{\text{lm}}{\Rightarrow}^* \gamma',$$

jos kussakin johtoaskelessa on produktiota sovellettu merkkijonon vasemmanpuoleisimpaan välikkeeseen (edellä johto (i)).

Vastaavasti määritellään *oikea johto* (edellä (iii)), jota merkitään

$$\gamma \underset{\text{rm}}{\Rightarrow}^* \gamma'$$

Suoria vasempia ja oikeita johtoaskelia merkitään $\gamma \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} \gamma'$ ja $\gamma \underset{\text{rm}}{\Rightarrow} \gamma'$.





Olkoon $G = (V, \Sigma, P, S)$ yhteydetön kielioppi.

Kieliopin $G$ mukainen *jäsennyspuu* on järjestetty puu, jolla on seuraavat ominaisuudet:

(i) puun solmut on nimetty joukon $V \cup \{\varepsilon\}$ alkioilla siten, että sisäsolmujen nimet ovat välikkeitä (so. joukosta $N = V - \Sigma$) ja juurisolmun nimenä on lähtösymboli $S$;

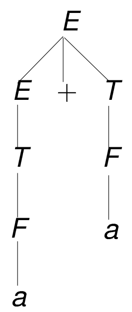
(ii) jos $A$ on puun jonkin sisäsolmun nimi, ja $X_1, \ldots, X_k$ ovat sen jälkeläisten nimet järjestyksessä, niin $A \to X_1 \ldots X_k$ on $G$:n produktio.

Jäsennyspuun $\tau$ *tuotos* on merkkijono, joka saadaan liittämällä yhteen sen lehtisolmujen nimet esijärjestyksessä (“vasemmalta oikealle”).





**Esimerkki.** Lauseen $a + a$ jäsennyspuu kieliopissa $G_{\text{expr}}$:




Lauseen johto:

$$\begin{aligned} E &\Rightarrow E+T \Rightarrow T+T \Rightarrow F+T \\ &\Rightarrow a+T \Rightarrow a+F \Rightarrow a+a \end{aligned}$$





Johtoa

$$S = \gamma_0 \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \gamma_n = \gamma$$

vastaavan jäsennyspuun muodostaminen:

(i) puun juuren nimeksi tulee $S$; jos $n = 0$, niin puussa ei ole muita solmuja; muuten

(ii) jos ensimmäisessä johtoaskelessa on sovellettu produktiota $S \to X_1 X_2 \ldots X_k$, niin juurelle tulee $k$ jälkeläissolmua, joiden nimet vasemmalta oikealle ovat $X_1, X_2, \ldots, X_k$;

(iii) jos seuraavassa askelessa on sovellettu produktiota $X_i \to Y_1 Y_2 \ldots Y_l$, niin juuren $i$:nnelle jälkeläissolmulle tulee $l$ jälkeläistä, joiden nimet vasemmalta oikealle ovat $Y_1, Y_2, \ldots, Y_l$; ja niin edelleen.

Konstruktiosta huomataan, että jos $\tau$ on jotakin johtoa $S \Rightarrow^* \gamma$ vastaava jäsennyspuu, niin $\tau$:n tuotos on $\gamma$.

Olkoon $\tau$ kieliopin $G$ mukainen jäsennyspuu, jonka tuotos on päätemerkkijono $x$.

Tällöin $\tau$:sta saadaan vasen johto $x$:lle käymällä puun solmut läpi esijärjestyksessä ("ylhäältä alas, vasemmalta oikealle") ja laventamalla vastaan tulevat välikkeet järjestyksessä puun osoittamalla tavalla.

Oikea johto saadaan käymällä puu läpi käänteisessä esijärjestyksessä ("ylhäältä alas, oikealta vasemmalle").

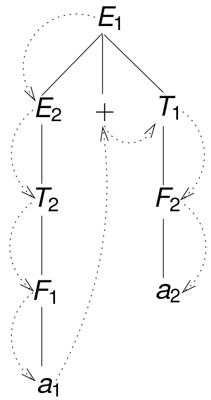
Muodostamalla annetusta vasemmasta johdosta $S \underset{\mathrm{lm}}{\Rightarrow}^* x$ ensin jäsennyspuu edellä esitetyllä tavalla, ja sitten jäsennyspuusta vasen johto, saadaan takaisin alkuperäinen johto; vastaava tulos pätee myös oikeille johdoille.





**Esimerkki.** Lauseen $a + a$ vasemman johdon muodostaminen jäsennyspuusta.

*Jäsennyspuu:*




*Solmut esijärjestyksessä:*

$E_1 E_2 T_2 F_1 a_1 + T_1 F_2 a_2$

*Vasen johto:*

$$E \underset{\mathrm{lm}}{\Rightarrow} E + T \underset{\mathrm{lm}}{\Rightarrow} T + T \underset{\mathrm{lm}}{\Rightarrow} F + T \underset{\mathrm{lm}}{\Rightarrow} a + T \underset{\mathrm{lm}}{\Rightarrow} a + F \underset{\mathrm{lm}}{\Rightarrow} a + a$$





**Lause 3.3** Olkoon $G = (V, \Sigma, P, S)$ yhteydetön kielioppi. Tällöin:

(i) jokaisella $G$:n lausejohdoksella $\gamma$ on $G$:n mukainen jäsennyspuu $\tau$, jonka tuotos on $\gamma$;

(ii) jokaista $G$:n mukaista jäsennyspuuta $\tau$, jonka tuotos on päätemerkkijono $x$, vastaavat yksikäsitteiset vasen ja oikea johto $S \underset{\mathrm{lm}}{\Rightarrow}^* x$ ja $S \underset{\mathrm{rm}}{\Rightarrow}^* x$.

**Seuraus 3.4** Jokaisella $G$:n lauseella on vasen ja oikea johto.

Siis: yhteydettömän kieliopin tuottamien lauseiden jäsennyspuut, vasemmat ja oikeat johdot vastaavat yksikäsitteisesti toisiaan.

Jäsennysongelman ratkaisuun katsotaan usein kuuluvan pelkän päätösongelman "Onko $x \in L(G)$?" ratkaisemisen lisäksi jonkin näistä jäsennysesityksistä tuottaminen.





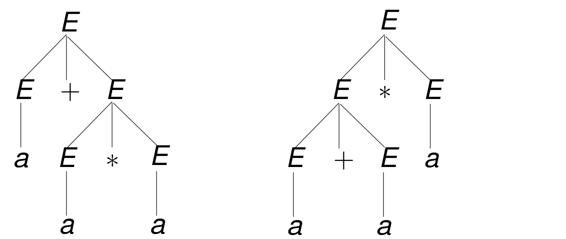
## Kieliopin moniselitteisyys

Lauseella voi olla kieliopissa useita jäsennyksiä.

**Esimerkki.** Tarkastellaan yksinkertaisten aritmeettisten lausekkeiden kielioppia:

$$G'_{\mathrm{expr}} = \{E \to E + E,\ E \to E * E,\ E \to a,\ E \to (E)\}.$$

Lauseella $a + a * a$ on tässä kieliopissa kaksi jäsennystä:




Yhteydetön kielioppi $G$ on *moniselitteinen*, jos jollakin $G$:n lauseella $x$ on kaksi erilaista $G$:n mukaista jäsennyspuuta. Muuten kielioppi on *yksiselitteinen*.

Moniselitteisyys on tietojenkäsittelysovelluksissa yleensä ei-toivottu ominaisuus, koska se merkitsee että annetulla lauseella on kaksi vaihtoehtoista “tulkintaa.”

Yhteydetön kieli, jonka tuottavat kieliopit ovat kaikki moniselitteisiä, on *luonnostaan moniselitteinen*.

Esimerkiksi kielioppi $G'_{\text{expr}}$ on moniselitteinen, kieliopit $G_{\text{expr}}$ ja $G_{\text{match}}$ yksiselitteisiä. Kieli $L_{\text{expr}} = L(G'_{\text{expr}})$ ei ole luonnostaan moniselitteinen, koska sillä on myös yksiselitteinen kielioppi $G_{\text{expr}}$. Luonnostaan moniselitteinen on esimerkiksi kieli

$$\{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ tai } j = k\}.$$

(Todistus sivuutetaan.)





## 3.4 Osittava jäsentäminen

Yksi (yleisessä muodossa tehoton!) tapa etsiä vasenta johtoa (jäsennyspuuta) annetun kieliopin $G$ mukaiselle lauseelle $x$ on aloittaa $G$:n lähtösymbolista ja generoida systemaattisesti kaikki mahdolliset vasemmat johdot (jäsennyspuut), samalla sovittaen muodostetun lausejohdoksen päätemerkkejä (puun lehtiä) $x$:n merkkeihin. Ei-yhteensopivuuden ilmetessä peruutetaan viimeksi tehty produktiovalinta ja kokeillaan järjestyksessä seuraavaa vaihtoehtoa.

Tällaista lauseenjäsennystapaa sanotaan *osittavaksi*, koska siinä tarkasteltu lause yritetään johtaa kieliopin lähtösymbolista osittamalla se valittujen produktioiden mukaisiin rakenneosiin ja yrittämällä näin, tarvittaessa toistuvasti edelleen osittamalla, sovittaa kieliopin tuottamaa rakennetta yhteen lauseen rakenteen kanssa.





*Esim.* Tarkastellaan kielioppia $G$:

$$\begin{aligned} E &\to T+E \mid T-E \mid T \\ T &\to a \mid (E). \end{aligned}$$

Lauseen $a-a$ osittava jäsennys $G$:n suhteen:

$$\begin{array}{llllllll}
E & \Rightarrow T+E & \Rightarrow a+T & \text{[ristiriita; peruutetaan]} & & & & \\
 & & \Rightarrow (E)+T & \text{[ristiriita; peruutetaan]} & & & & \\
 & \Rightarrow T-E & \Rightarrow a-E & \Rightarrow a-T+E & \Rightarrow a-a+E & & & \\
 & & & \text{[ristiriita; peruutetaan]} & & & & \\
 & \Rightarrow T-E & \Rightarrow a-E & \Rightarrow a-T+E & \Rightarrow a-(E)+E & & & \\
 & & & \text{[ristiriita; peruutetaan]} & & & & \\
 & & & \Rightarrow a-T-E & \Rightarrow a-a-E & & & \\
 & & & \text{[ristiriita; peruutetaan]} & & & & \\
 & & & \Rightarrow a-T-E & \Rightarrow a-(E)-E & & & \\
 & & & \text{[ristiriita; peruutetaan]} & & & & \\
 & & & \Rightarrow a-T & \Rightarrow a-a & \text{[OK!]} & & 
\end{array}$$





Em. osittava jäsennystekniikka saadaan huomattavasti tehokkaammaksi, jos kieliopilla on sellainen ominaisuus, että jäsennyksen joka vaiheessa määrää tavoitteena olevan lauseen *seuraava merkki* yksikäsitteisesti sen, mikä lavennettavana olevaan välikkeeseen liittyvä produktio on valittava. Kielioppia, jolla on tämä ominaisuus, sanotaan *LL(1)-tyyppiseksi.*

Muokataan $G$:stä välikkeen $E$ produktiot “tekijöimällä” ekvivalentti kielioppi $G'$:

$$\begin{aligned} E &\to TE' \\ E' &\to +E \mid -E \mid \varepsilon \\ T &\to a \mid (E). \end{aligned}$$

Esimerkiksi lauseen $a-a$ jäsentäminen $G'$:n suhteen (kulloisenkin produktiovalinnan määräävä syötemerkki on tässä merkitty vastaavan johtonuolen päälle):

$$E \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} TE' \underset{\text{lm}}{\overset{a}{\Rightarrow}} aE' \underset{\text{lm}}{\overset{-}{\Rightarrow}} a-E \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} a-TE' \underset{\text{lm}}{\overset{a}{\Rightarrow}} a-aE' \underset{\text{lm}}{\overset{\varepsilon}{\Rightarrow}} a-a.$$

LL(1)-tyyppiselle kieliopille on helppo kirjoittaa jäsennysohjelma suoraan rekursiivisina proseduureina. Esimerkiksi kieliopin *G′* pohjalta voidaan muodostaa seuraava C-kielinen funktiokokoelma, joka syötejonon jäsennyksen yhteydessä tulostaa sen tuottavan vasemman johdon produktiot järjestyksessä.

```
#include <stdio.h>

int next;
void E(void); void Eprime(void); void T(void);

void E(void)
{
  printf("E  -> TE'\n");
  T(); Eprime();
}
```





```
void Eprime(void)
{
  if (next == '+') {
    printf("E' -> +E\n");
    next = getchar();
    E();
  }
  else if (next == '-') {
    printf("E' -> -E\n");
    next = getchar();
    E();
  }
  else
    printf("E' -> \n");
}
```





```
void T(void)
{
  if (next == 'a') {
    printf("T  -> a\n");
    next = getchar();
  }
  else if (next == '(') {
    printf("T  -> (E)\n");
    next = getchar();
    E();
    if (next != ')')
      ERROR(") expected.");
    next = getchar();
  }
  else ERROR("T cannot start with this.");
}
```





```
void ERROR(char *msg)
{
  printf("%s\n",msg); exit(1);
}

int main(void)
{
  next = getchar();
  E();
  exit(0);
}
```

Esimerkiksi syötejonoa `a-(a+a)` käsitellessään ohjelma tulostaa seuraavat rivit:

```
E → TE'
T → a
E' → -E
E → TE'
T → (E)
E → TE'
T → a
E' → +E
E → TE'
T → a
E' →
E' →
```

Tulostus vastaa vasenta johtoa:

$$
\begin{aligned}
E &\Rightarrow TE' \Rightarrow aE' \Rightarrow a-E \Rightarrow a-TE' \\
&\Rightarrow a-(E)E' \Rightarrow a-(TE')E' \\
&\Rightarrow a-(aE')E' \Rightarrow a-(a+E)E' \\
&\Rightarrow a-(a+TE')E' \Rightarrow a-(a+aE')E' \\
&\Rightarrow a-(a+a)E' \Rightarrow a-(a+a).
\end{aligned}
$$