## 3.6 Cocke-Younger-Kasami -jäsennysalgoritmi

Osittava jäsentäminen on selkeä ja tehokas jäsennysmenetelmä LL(1)-kieliopeille: $n$ merkin mittaisen syötemerkkijonon käsittely sujuu ajassa $O(n)$. LL(1)-kieliopit ovat kuitenkin melko rajoitettu luokka; yleisen jäsennysongelman ratkaisu ei ole yhtä helppoa.

Periaatteessa ongelma voidaan ratkaista esim. soveltamalla yleistä (peruuttavaa) osittavaa jäsennystä, mutta käytännössä vaikeudeksi muodostuu erilaisten kokeiltavien johtovaihtoehtojen suuri määrä. (Tyypillisesti $O(c^n)$ kpl jollakin $c \geq 2$.)





*Cocke-Younger-Kasami -algoritmi* on yleiseen ns. dynaamisen ohjelmoinnin tekniikkaan (t. osaratkaisujen taulukointiin) perustuva menetelmä mielivaltaisen yhteydettömän kieliopin tuottamien merkkijonojen tunnistamiseen. Menetelmä toimii ajassa $O(n^3)$, missä $n$ on tutkittavan merkkijonon pituus.

Algoritmia varten määritellään ensin joitakin kielioppimuunnoksia.





### 1. $\varepsilon$-produktioiden poistaminen

Olkoon $G = (V, \Sigma, P, S)$ yhteydetön kielioppi. Välike $A \in V - \Sigma$ on *tyhjentyvä*, jos $A \underset{G}{\Rightarrow}^* \varepsilon$.

**Lemma 3.5.** Mistä tahansa yhteydettömästä kieliopista $G$ voidaan muodostaa ekvivalentti kielioppi $G'$, jossa enintään lähtösymboli on tyhjentyvä.





*Todistus.* Olkoon $G = (V, \Sigma, P, S)$. Selvitetään ensin $G$:n tyhjentyvät välikkeet seuraavasti:

(i) asetetaan aluksi

$$\text{NULL} := \{A \in V - \Sigma \mid A \to \varepsilon \text{ on } G\text{:n produktio}\};$$

(ii) toistetaan sitten seuraavaa NULL-joukon laajennusoperaatiota, kunnes joukko ei enää kasva:

$$\begin{aligned} \text{NULL} \quad := \quad & \text{NULL} \cup \\ & \{A \in V - \Sigma \mid A \to B_1 \dots B_k \text{ on } G\text{:n prod.}, \\ & B_i \in \text{NULL kaikilla } i = 1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Tämän jälkeen korvataan kukin $G$:n produktio $A \to X_1 \dots X_k$ kaikkien sellaisten produktioiden joukolla, jotka ovat muotoa

$$A \to \alpha_1 \dots \alpha_k, \quad \text{missä}$$

$$\alpha_i = \begin{cases} X_i, & \text{jos } X_i \notin \text{NULL;} \\ X_i \text{ tai } \varepsilon, & \text{jos } X_i \in \text{NULL.} \end{cases}$$

Lopuksi poistetaan kaikki muotoa $A \to \varepsilon$ olevat produktiot. Jos poistettavana on myös produktio $S \to \varepsilon$, otetaan muodostettavaan kielioppiin $G'$ uusi lähtösymboli $S'$ ja sille produktiot $S' \to S$ ja $S' \to \varepsilon$. $\square$





**Esimerkki.** Poistetaan $\varepsilon$-produktiot kieliopista:

$$\begin{aligned} S &\to A \mid B \\ A &\to aBa \mid \varepsilon \qquad \Rightarrow \quad (\text{NULL} = \{A, B, S\}) \\ B &\to bAb \mid \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &\to A \mid B \mid \varepsilon \\ A &\to aBa \mid aa \mid \varepsilon \qquad \Rightarrow \\ B &\to bAb \mid bb \mid \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S' &\to S \mid \varepsilon \\ S &\to A \mid B \\ A &\to aBa \mid aa \\ B &\to bAb \mid bb. \end{aligned}$$





**2. Yksikköproduktioiden poistaminen**

Produktio muotoa $A \to B$, missä $A$ ja $B$ ovat välikkeitä, on *yksikköproduktio*.

**Lemma 3.6.** Mistä tahansa yhteydettömästä kieliopista $G$ voidaan muodostaa ekvivalentti kielioppi $G'$, jossa ei ole yksikköproduktioita.





*Todistus.* Olkoon $G = (V, \Sigma, P, S)$. Selvitetään ensin $G$:n kunkin välikkeen "yksikköseuraajat" seuraavasti:

(i) asetetaan aluksi kullekin $A \in V - \Sigma$:

$$F(A) := \{B \in V - \Sigma \mid A \to B \text{ on } G\text{:n produktio}\};$$

(ii) toistetaan sitten seuraavia $F$-joukkojen laajennusoperaatiota, kunnes joukot eivät enää kasva:

$$F(A) := F(A) \cup \bigcup \{F(B) \mid A \to B \text{ on } G\text{:n produktio}\}.$$

Tämän jälkeen poistetaan $G$:stä kaikki yksikköproduktiot ja lisätään niiden sijaan kaikki mahdolliset produktiot muotoa $A \to \omega$, missä $B \to \omega$ on $G$:n ei-yksikköproduktio jollakin $B \in F(A)$. $\square$

**Esimerkki.** Poistetaan yksikköproduktiot aiemmin muodostetusta kieliopista:

$$\begin{aligned} S' &\to S \mid \varepsilon \\ S &\to A \mid B \\ A &\to aBa \mid aa \\ B &\to bAb \mid bb. \end{aligned}$$

Välikkeiden yksikköseuraajat ovat: $F(S') = \{S, A, B\}$, $F(S) = \{A, B\}$, $F(A) = F(B) = \emptyset$. Korvaamalla yksikköproduktiot edellä esitetyllä tavalla saadaan kielioppi:

$$\begin{aligned} S' &\to aBa \mid aa \mid bAb \mid bb \mid \varepsilon \\ S &\to aBa \mid aa \mid bAb \mid bb \\ A &\to aBa \mid aa \\ B &\to bAb \mid bb. \end{aligned}$$

(Huomataan, että välike $S$ on nyt itse asiassa “turha”, so. se ei voi esiintyä minkään kieliopin lauseen johdossa. Myös turhat välikkeet voidaan haluttaessa poistaa kieliopista samantapaisella algoritmilla (HT).)





**Chomskyn normaalimuoto**

Yhteydetön kielioppi $G = (V, \Sigma, P, S)$ on *Chomskyn normaalimuodossa*, jos sen välikkeistä enintään $S$ on tyhjentyvä, ja mahdollista produktiota $S \to \varepsilon$ lukuunottamatta muut produktiot ovat muotoa

$$A \to BC \qquad \text{tai} \qquad A \to a,$$

missä $A, B$ ja $C$ ovat välikkeitä ja $a$ on päätemerkki.

Lisäksi vaaditaan yksinkertaisuuden vuoksi, että lähtösymboli $S$ ei esiinny minkään produktion oikealla puolella.





**Lause 3.7.** Mistä tahansa yhteydettömästä kieliopista $G$ voidaan muodostaa ekvivalentti Chomskyn normaalimuotoinen kielioppi $G'$.





*Todistus.* Olkoon $G = (V, \Sigma, P, S)$. Poistetaan ensin $G$:stä $\varepsilon$-produktiot ja yksikköproduktiot lemmojen 3.5 ja 3.6 konstruktioilla. Tämän jälkeen kaikki $G$:n produktiot ovat muotoa $A \to a$ tai $A \to X_1 \dots X_k$, $k \geq 2$ (tai $S \to \varepsilon$).

Lisätään ensin kielioppiin kutakin päätemerkkiä $a$ varten uusi välike $C_a$ ja sille produktio $C_a \to a$. Korvataan sitten kussakin muotoa $A \to X_1 \dots X_k$, $k \geq 2$, olevassa produktiossa ensin kaikki päätemerkit em. uusilla välikkeillä, ja sitten koko produktio produktiojoukolla

$$\begin{aligned} A &\to X_1 A_1 \\ A_1 &\to X_2 A_2 \\ &\vdots \\ A_{k-2} &\to X_{k-1} X_k, \end{aligned}$$

missä $A_1, \dots, A_{k-2}$ ovat jälleen uusia välikkeitä. $\square$

**Esimerkki.** Kielioppi:

$$\begin{aligned} S &\to aBCd \mid bbb \\ B &\to b \\ C &\to c \end{aligned}$$

Em. konstruktiolla saatu Chomskyn normaalimuoto:

$$\begin{aligned} S &\to C_a S_1^1 \\ S_1^1 &\to B S_2^1 \\ S_2^1 &\to C C_d \\ S &\to C_b S_1^2 \\ S_1^2 &\to C_b C_b \\ B &\to b \\ C &\to c \\ C_a &\to a \\ C_b &\to b \\ C_c &\to c \\ C_d &\to d. \end{aligned}$$





## CYK-algoritmi

Olkoon $G = (V, \Sigma, P, S)$ yhteydetön kielioppi. Lauseen 3.7 nojalla voidaan olettaa, että $G$ on Chomskyn normaalimuodossa. Kysymys, kuuluuko annettu merkkijono $x$ kieleen $L(G)$ voidaan tällöin ratkaista seuraavasti:

Jos $x = \varepsilon$, niin $x \in L(G)$ joss $S \to \varepsilon$ on $G$:n produktio.

Muussa tapauksessa merkitään $x = a_1 \ldots a_n$ ja tarkastellaan $x$:n eri osajonojen tuottamista.

Merkitään $N_{ik}$:lla niiden välikkeiden $A$ joukkoa, joista voidaan tuottaa $x$:n positiosta $i$ alkava, $k$ merkin mittainen osajono:

$$\begin{aligned} N_{ik} &= \{A \in V - \Sigma \mid A \underset{G}{\Rightarrow}^* a_i \ldots a_{i+k-1}\}, \\ &\quad 1 \le i \le i + k - 1 \le n. \end{aligned}$$

Joukot $N_{ik}$ voidaan laskea taulukoimalla lyhyistä osajonoista pitempiin seuraavassa esitettävällä tavalla. Selvästi on $x \in L(G)$ joss $S \in N_{1n}$.





Joukkojen $N_{ik}$ laskeminen:

(i) asetetaan aluksi kaikilla $i = 1, \ldots, n$:

$$N_{i1} := \{A \in V - \Sigma \mid A \to a_i \text{ on } G\text{:n produktio}\};$$

(ii) lasketaan sitten kaikilla $k = 2, \ldots, n$ ja kullakin $k$ kaikilla $i = 1, \ldots, n - k + 1$:

$$N_{ik} := \bigcup_{j=1}^{k-1} \{A \in V - \Sigma \mid A \to BC \text{ on } G\text{:n produktio, missä } B \in N_{ij} \text{ ja } C \in N_{i+j,k-j}\}. \quad \square$$





**Esimerkki.** Chomskyn normaalimuotoinen kielioppi $G$:

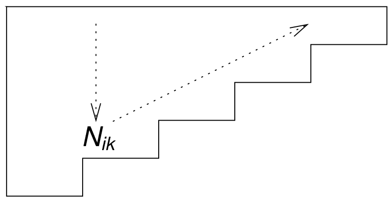
$$\begin{aligned} S &\to AB \mid BC \\ A &\to BA \mid a \\ B &\to CC \mid b \\ C &\to AB \mid a \end{aligned}$$

CYK-algoritmin laskenta kieliopilla $G$ ja syötteellä $x = baaba$:

| $N_{ik}$ ($k \downarrow$, $i \to$) | $1:b$ | $2:a$ | $3:a$ | $4:b$ | $5:a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $B$ | $A, C$ | $A, C$ | $B$ | $A, C$ |
| 2 | $S, A$ | $B$ | $S, C$ | $S, A$ | – |
| 3 | $\emptyset$ | $B$ | $B$ | – | |
| 4 | $\emptyset$ | $S, A, C$ | – | | |
| 5 | $S, A, C$ | – | | | |

Koska lähtösymboli $S$ kuuluu joukkoon $N_{15}$, päätellään että $x$ kuuluu kieleen $L(G)$.

Yleisesti ottaen CYK-algoritmissa jotakin joukkoa $N_{ik}$ määritettäessä edetään samanaikaisesti sarakkeessa $N_{ij}$ joukkoa $N_{ik}$ "kohti" ja diagonaalia $N_{i+j,k-j}$ pitkin siitä "poispäin":

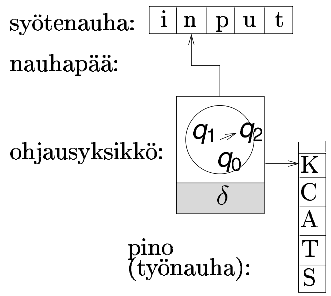







## 3.7 Pinoautomaatit

Yhteydettömille kielille saadaan automaattikarakterisointi ns. *pinoautomaattien* avulla:




Pinoautomaatti on kuin äärellinen automaatti, johon on lisätty rajoittamattoman suuri *pino*. Pinon käyttö on varsin rajallista: automaatti voi lukea, kirjoittaa, poistaa tai lisätä merkkejä vain pinon päälle.





**Määritelmä 3.2** *Pinoautomaatti* on kuusikko

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F),$$

missä

- $Q$ on *tilojen* äärellinen joukko;
- $\Sigma$ on *syöteaakkosto*;
- $\Gamma$ on *pinoaakkosto*;
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}))$ on (joukkoarvoinen) *siirtymäfunktio*;
- $q_0 \in Q$ on *alkutila*;
- $F \subseteq Q$ on *(hyväksyvien) lopputilojen* joukko.





Siirtymäfunktion arvon

$$\delta(q, \sigma, \gamma) = \{(q_1, \gamma_1), \ldots, (q_k, \gamma_k)\}$$

tulkinta on, että ollessaan tilassa $q$ ja lukiessaan syötemerkin $\sigma$ ja pinomerkin $\gamma$ automaatti voi siirtyä johonkin tiloista $q_1, \ldots, q_k$ ja korvata vastaavasti pinon päällimmäisen merkin jollakin merkeistä $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$. Pinoautomaatit ovat siis yleisessä tapauksessa *epädeterministisiä*.

Jos $\sigma = \varepsilon$, automaatti tekee siirtymän syötemerkkiä lukematta. Jos $\gamma = \varepsilon$, automaatti ei lue pinomerkkiä ja uusi kirjoitettu merkki tulee pinon päälle vanhaa päällimmäistä merkkiä poistamatta ("push"-operaatio). Jos pinosta luettu merkki on $\gamma \neq \varepsilon$ ja kirjoitettavana on $\gamma_i = \varepsilon$, pinosta poistetaan sen päällimmäinen merkki ("pop"-operaatio).

Automaatin *tilanne* on kolmikko $(q, w, \alpha) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$; erityisesti automaatin *alkutilanne syötteellä* $x$ on kolmikko $(q_0, x, \varepsilon)$.

Intuitio: tilanteessa $(q, w, \alpha)$ automaatti on tilassa $q$, syötemerkkijonon käsittelemätön osa on $w$ ja pinossa on ylhäältä alas lukien merkkijono $\alpha$.

Tilanne $(q, w, \alpha)$ *johtaa suoraan* tilanteeseen $(q', w', \alpha')$, merkitään

$$(q, w, \alpha) \underset{M}{\vdash} (q', w', \alpha'),$$

jos voidaan kirjoittaa $w = \sigma w'$, $\alpha = \gamma\beta$, $\alpha' = \gamma'\beta$ $(|\sigma|, |\gamma|, |\gamma'| \leq 1)$, siten että

$$(q', \gamma') \in \delta(q, \sigma, \gamma).$$





Tilanne $(q, w, \alpha)$ *johtaa tilanteeseen* $(q', w', \alpha')$, merkitään

$$(q, w, \alpha) \underset{M}{\vdash}^* (q', w', \alpha'),$$

jos on olemassa tilannejono $(q_0, w_0, \alpha_0)$, $(q_1, w_1, \alpha_1)$, ..., $(q_n, w_n, \alpha_n)$, $n \geq 0$, siten että

$$(q, w, \alpha) = (q_0, w_0, \alpha_0) \underset{M}{\vdash} (q_1, w_1, \alpha_1) \underset{M}{\vdash} \cdots \underset{M}{\vdash} (q_n, w_n, \alpha_n) = (q', w', \alpha').$$

Pinoautomaatti $M$ *hyväksyy* merkkijonon $x \in \Sigma^*$, jos

$$(q_0, x, \varepsilon) \underset{M}{\vdash}^* (q_f, \varepsilon, \alpha) \quad \text{joillakin } q_f \in F \text{ ja } \alpha \in \Gamma^*,$$

siis jos se syötteen loppuessa on jossakin hyväksyvässä lopputilassa; muuten $M$ *hylkää* $x$:n.

Automaatin $M$ *tunnistama kieli* on:

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid (q_0, x, \varepsilon) \underset{M}{\vdash}^* (q_f, \varepsilon, \alpha) \text{ joillakin } q_f \in F \text{ ja } \alpha \in \Gamma^*\}.$$





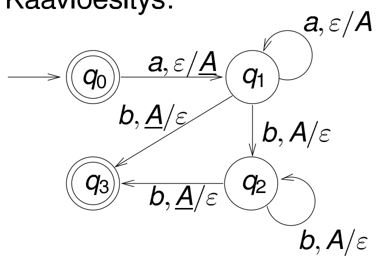
**Esimerkki.** Pinoautomaatti kielelle $\{a^k b^k \mid k \geq 0\}$:

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \{A, \underline{A}\}, \delta, q_0, \{q_0, q_3\}),$$

missä

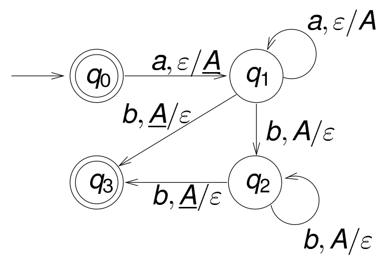
$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a, \varepsilon) &= \{(q_1, \underline{A})\},\\
\delta(q_1, a, \varepsilon) &= \{(q_1, A)\},\\
\delta(q_1, b, A) &= \{(q_2, \varepsilon)\},\\
\delta(q_1, b, \underline{A}) &= \{(q_3, \varepsilon)\},\\
\delta(q_2, b, A) &= \{(q_2, \varepsilon)\},\\
\delta(q_2, b, \underline{A}) &= \{(q_3, \varepsilon)\},\\
\delta(q, \sigma, \gamma) &= \emptyset \quad \text{muilla } (q, \sigma, \gamma).
\end{aligned}$$

Kaavioesitys:








Automaatin toiminta syötteellä *aabb*:

$$\begin{aligned}
(q_0, aabb, \varepsilon) &\vdash (q_1, abb, \underline{A}) \vdash (q_1, bb, A\underline{A})\\
&\vdash (q_2, b, \underline{A}) \vdash (q_3, \varepsilon, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Koska $q_3 \in F = \{q_0, q_3\}$, on siis $aabb \in L(M)$.

**Pinoautomaatit ja yhteydettömät kielet**

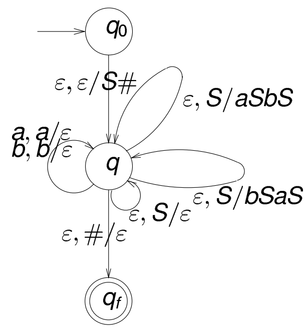
**Lause 3.8** Kieli on yhteydetön, jos ja vain jos se voidaan tunnistaa jollakin (epädeterministisellä) pinoautomaatilla. □

Em. lauseen todistus sivuutetaan tässä, mutta periaatteena esim. annettua kielioppia $G$ vastaavan pinoautomaatin $M_G$ toiminnassa on, että $M_G$:n pinon käyttäytyminen syötteellä $x$ noudattelee $G$:n mukaisen vasemman lausejohdon $S \underset{lm}{\Rightarrow}^* x$ etenemistä: jos pinon päällimmäisenä on välikemerkki, sovelletaan jotain $G$:n produktiota ja lisätään pinon pinnalle vastaavat merkit; jos pinon päällimmäisenä on päätemerkki, se sovitetaan yhteen seuraavan syötemerkin kanssa.

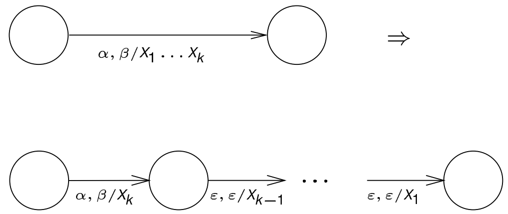




**Esimerkki.** Kielioppia $\{S \to aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon\}$ vastaava pinoautomaatti:




Automaatin kuvauksessa on käytetty seuraavaa luonnollista lyhennemerkintää:








Esimerkiksi syötteellä *abab* on em. automaatilla seuraava hyväksyvä laskenta:

$$
\begin{array}{llllll}
(q_0, abab, \varepsilon) & \vdash & (q, abab, S\#) & \vdash^* & (q, abab, aSbS\#) \\
 & \vdash & (q, bab, SbS\#) & \vdash^* & (q, bab, bSaSbS\#) \\
 & \vdash & (q, ab, SaSbS\#) & \vdash & (q, ab, aSbS\#) \\
 & \vdash & (q, b, SbS\#) & \vdash & (q, b, bS\#) \\
 & \vdash & (q, \varepsilon, S\#) & \vdash & (q, \varepsilon, \#) \\
 & \vdash & (q_f, \varepsilon, \varepsilon). & &
\end{array}
$$

Tämä vastaa annetun kieliopin mukaista lauseen *abab* vasenta johtoa:

$$
\begin{array}{llllllll}
\underline{S} & \Rightarrow & a\underline{S}bS & \Rightarrow & ab\underline{S}aSbS & \Rightarrow & aba\underline{S}bS \\
 & \Rightarrow & abab\underline{S} & \Rightarrow & abab. & &
\end{array}
$$





Pinoautomaatti $M$ on *deterministinen*, jos jokaisella tilanteella $(q, w, \alpha)$ on enintään yksi mahdollinen seuraaja $(q', w', \alpha')$, jolla

$$(q, w, \alpha) \underset{M}{\vdash} (q', w', \alpha')$$

Toisin kuin äärellisten automaattien tapauksessa, *epädeterministiset pinoautomaatit ovat aidosti vahvempia kuin deterministiset*. Esimerkiksi kieli $\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ voidaan tunnistaa epädeterministisellä, mutta ei deterministisellä pinoautomaatilla. (Tod. siv.)

Yhteydetön kieli on *deterministinen*, jos se voidaan tunnistaa jollakin deterministisellä pinoautomaatilla. Deterministiset kielet voidaan jäsentää ajassa $O(n)$; yleiset yhteydettömät kielet vaativat tunnetuilla menetelmillä lähes ajan $O(n^3)$.