

## 2.6 SÄÄNNÖLLISET LAUSEKKEET

Automaattimalleista poikkeava tapa kuvata yksinkertaisia kieliä.

Olkoot  $A$  ja  $B$  aakkoston  $\Sigma$  kieliä. Perusoperaatioita:

- ▶ *Yhdiste*:  $A \cup B = \{x \in \Sigma^* \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}$ ;
- ▶ *Katenaatio*:  $AB = \{xy \in \Sigma^* \mid x \in A, y \in B\}$ ;
- ▶ *Potenssit*:

$$\begin{cases} A^0 = \{\varepsilon\}, \\ A^k = AA^{k-1} = \{x_1 \dots x_k \mid x_i \in A \quad \forall i = 1, \dots, k\} \quad (k \geq 1); \end{cases}$$

- ▶ *Sulkeuma t. "Kleenen tähti"*:

$$\begin{aligned} A^* &= \bigcup_{k \geq 0} A^k \\ &= \{x_1 \dots x_k \mid k \geq 0, x_i \in A \quad \forall i = 1, \dots, k\}. \end{aligned}$$



**Määritelmä 2.3** Aakkoston  $\Sigma$  säännölliset lausekkeet määritellään induktiivisesti säännöllillä:

1.  $\emptyset$  ja  $\varepsilon$  ovat  $\Sigma$ :n säännöllisiä lausekkeita;
2.  $a$  on  $\Sigma$ :n säännöllinen lauseke kaikilla  $a \in \Sigma$ ;
3. jos  $r$  ja  $s$  ovat  $\Sigma$ :n säännöllisiä lausekkeita, niin  $(r \cup s)$ ,  $(rs)$  ja  $r^*$  ovat  $\Sigma$ :n säännöllisiä lausekkeita;
4. muita  $\Sigma$ :n säännöllisiä lausekkeita ei ole.



Kukin  $\Sigma$ :n säännöllinen lauseke  $r$  kuvaa kielen  $L(r)$ , joka määritellään:

- ▶  $L(\emptyset) = \emptyset$ ;
- ▶  $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$ ;
- ▶  $L(a) = \{a\}$  kaikilla  $a \in \Sigma$ ;
- ▶  $L((r \cup s)) = L(r) \cup L(s)$ ;
- ▶  $L((rs)) = L(r)L(s)$ ;
- ▶  $L(r^*) = (L(r))^*$ .



Aakkoston  $\{a, b\}$  säännöllisiä lausekkeita: ◀

$$\begin{aligned} r_1 &= ((ab)b), & r_2 &= (ab)^*, \\ r_3 &= (ab^*), & r_4 &= (a(b \cup (bb)))^*. \end{aligned}$$

Lausekkeiden kuvaamat kielet:

$$\begin{aligned} L(r_1) &= (\{a\}\{b\})\{b\} = \{ab\}\{b\} = \{abb\}; \\ L(r_2) &= \{ab\}^* = \{\varepsilon, ab, abab, ababab, \dots\} \\ &= \{(ab)^i \mid i \geq 0\}; \\ L(r_3) &= \{a\}(\{b\})^* = \{a, ab, abb, abbb, \dots\} \\ &= \{ab^i \mid i \geq 0\}; \\ L(r_4) &= (\{a\}\{b, bb\})^* = \{ab, abb\}^* \\ &= \{\varepsilon, ab, abb, abab, ababb, \dots\} \\ &= \{x \in \{a, b\}^* \mid \text{kutakin } a\text{-kirjainta } x\text{:ssä} \\ &\quad \text{seuraa 1 tai 2 } b\text{-kirjainta}\}. \end{aligned}$$



Sulkumerkkien vähentämissääntöjä:

Operaattoreiden prioriteetti:

$$* \quad \gamma \quad \cdot \quad \gamma \quad \cup$$

Yhdiste- ja tulo-operaatioiden assosiativisuus:

$$L(((r \cup s) \cup t)) = L((r \cup (s \cup t)))$$

$$L(((rs)t)) = L((r(st)))$$

⇒ peräkkäisiä yhdisteitä ja tuloja ei tarvitse suluttaa.

Käytetään tavallisia kirjaimia, mikäli sekaannuksen vaaraa merkkijonoihin ei ole.

Yksinkertaisemmin siis:

$$r_1 = abb, \quad r_2 = (ab)^*, \quad r_3 = ab^*, \quad r_4 = (a(b \cup bb))^*.$$



**Määritelmä 2.4** Kieli on *säännöllinen*, jos se voidaan kuvata säännöllisellä lausekkeella.



## Säännöllisten lausekkeiden sieventäminen

Säännöllisillä kielillä on yleensä useita vaihtoehtoisia kuvauksia, esim.:

$$\begin{aligned} \Sigma^* &= L((a \cup b)^*) \\ &= L((a^*b^*)^*) \\ &= L(a^*b^* \cup (a \cup b)^*ba(a \cup b)^*). \end{aligned}$$

Määritelmä. Säännölliset lausekkeet  $r$  ja  $s$  ovat *ekvivalentit*, merk.  $r = s$ , jos  $L(r) = L(s)$ .

Lausekkeen sieventäminen = "yksinkertaisimman" ekvivalentin lausekkeen määrittäminen.

Säännöllisten lausekkeiden ekvivalenssitestaus on epätriviaali, mutta periaatteessa mekaanisesti ratkeava ongelma.



Sievennyssääntöjä:

$$\begin{aligned} r \cup (s \cup t) &= (r \cup s) \cup t & r \cup \emptyset &= r \\ r(st) &= (rs)t & \varepsilon r &= r \\ r \cup s &= s \cup r & \emptyset r &= \emptyset \\ r(s \cup t) &= rs \cup rt & r^* &= \varepsilon \cup r^* r \\ (r \cup s)t &= rt \cup st & r^* &= (\varepsilon \cup r)^* \\ r \cup r &= r & & \end{aligned}$$

Mikä tahansa säännöllisten lausekkeiden tosi ekvivalenssi voidaan johtaa näistä laskulaeista, kun lisätään päättelysääntö: jos  $r = rs \cup t$ , niin  $r = ts^*$ , edellyttäen että  $\varepsilon \notin L(s)$ .

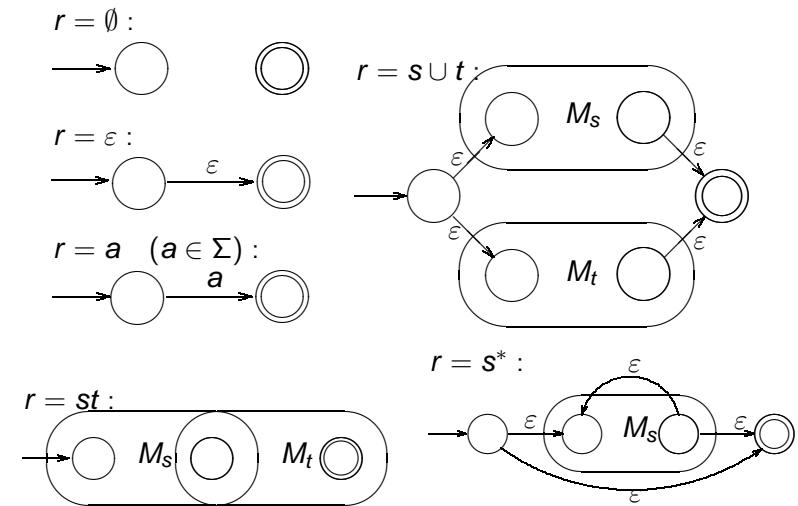


## 2.7 ÄÄRELLISET AUTOMAATIT JA SÄÄNNÖLLISET KIELET

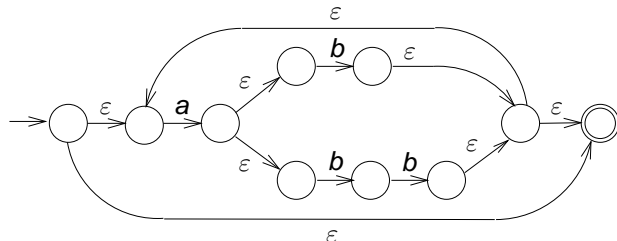
**Lause 2.3** Jokainen säännöllinen kieli voidaan tunnistaa äärellisellä automaatilla.

*Todistus.* Seuraavan kalvon induktiivisen konstruktion avulla voidaan mielivaltaisen säännöllisen lausekkeen  $r$  rakennetta seuraten muodostaa  $\varepsilon$ -automaatti  $M_r$ , jolla  $L(M_r) = L(r)$ . Tästä automaatista voidaan poistaa  $\varepsilon$ -siirtymät Lemman 2.4 mukaisesti, ja tarvittaessa voidaan syntyvä epädeterministinen automaatti determinisoida Lauseen 2.2 konstruktiolla.

Esitettävästä konstruktiosta on syytä huomata, että muodostettaviin  $\varepsilon$ -automaatteihin tulee aina yksikäsitteiset alkua ja lopputila, eikä minkään osa-automaatin lopputilasta lähde eikä alkutilaan tule yhtään ko. osa-automaatin sisäistä siirtymää. □



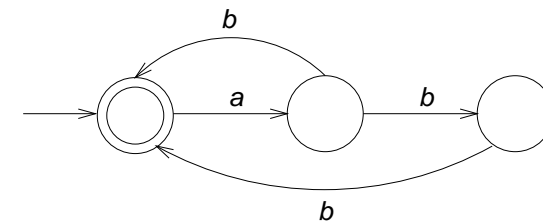
Esimerkiksi lausekkeesta  $r = (a(b \cup bb))^*$  saadaan näiden sääntöjen mukaan seuraava  $\varepsilon$ -automaatti:



Automaatti on selvästi hyvin redundantti. Käsien automaatteja suunniteltaessa ne kannattaakin usein muodostaa suoraan.



Esim. lausekkeen  $r = (a(b \cup bb))^*$  perusteella on helppo muodostaa seuraava yksinkertainen epädeterministinen tunnistaja-automaatti:



**Lause 2.4** Jokainen äärellisellä automaatilla tunnistettava kieli on säännöllinen.

*Todistus.* Tarvitaan vielä yksi äärellisten automaattien laajennus: *lausekeautomaatissa* voidaan siirtymien ehtoina käyttää mielivaltaisia säännöllisiä lausekkeita.

Formalisointi: Merk.  $RE_\Sigma =$  aakkoston  $\Sigma$  säännöllisten lausekkeiden joukko. *Lausekeautomaatti* on viisikko

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F),$$

missä siirtymäfunktio  $\delta$  on äärellinen kuvaus

$$\delta : Q \times RE_\Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$

(so.  $\delta(q, r) \neq \emptyset$  vain äärellisen monella parilla  $(q, r) \in Q \times RE_\Sigma$ ).



Yhden askelen tilannejohto määritellään:

$$(q, w) \xrightarrow[M]{\quad} (q', w')$$

jos on  $q' \in \delta(q, r)$  jollakin sellaisella  $r \in RE_\Sigma$ , että  $w = zw'$ ,  $z \in L(r)$ . Muut määritelmät samat kuin aiemmin.

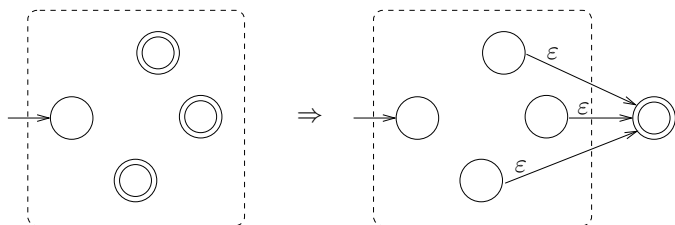
Todistetaan: jokainen lausekeautomaatilla tunnistettava kieli on säännöllinen.



Olkoon  $M$  jokin lausekeautomaatti. Säännöllinen lauseke, joka kuvaa  $M$ :n tunnistaman kielen, muodostetaan kahdessa vaiheessa:

1. Tiivistetään  $M$  ekvivalentiksi enintään 2-tilaiseksi lausekeautomaatiksi seuraavilla muunnoksilla:

(i) Jos  $M$ :llä on useita lopputiloja, yhdistetään ne seuraavasti.



(ii) Poistetaan  $M$ :n muut kuin alku- ja lopputila yksi kerrallaan seuraavasti. Olk.  $q$  jokin  $M$ :n tila, joka ei ole alku- eikä lopputila; tarkastellaan kaikkia "reittejä", jotka  $M$ :ssä kulkevat  $q$ :n kautta. Olk.  $q_i$  ja  $q_j$   $q$ :n välittömät edeltäjä- ja seuraajatila jollakin tällaisella reitillä. Poistetaan  $q$  reitiltä  $q_i \rightarrow q_j$  oheisen kuvan (i) muunnoksella, jos tilasta  $q$  ei ole siirtymää itseensä, ja kuvan (ii) muunnoksella, jos tilasta  $q$  on siirtymä itseensä:

$$(i): \quad \begin{array}{c} q_i \xrightarrow{r} q \xrightarrow{s} q_j \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} q_i \xrightarrow{rs} q_j \end{array}$$

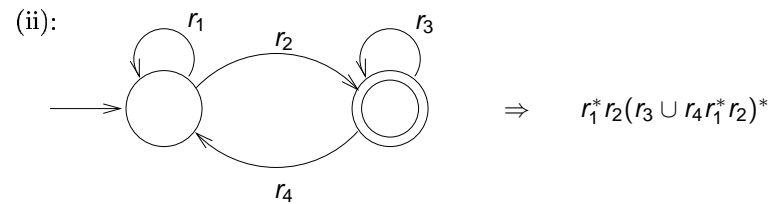
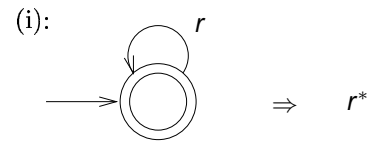
$$(ii): \quad \begin{array}{c} q_i \xrightarrow{r} q \xrightarrow{s} q_j \\ \quad \quad \quad \uparrow t \\ \quad \quad \quad q \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} q_i \xrightarrow{rt^*s} q_j \end{array}$$

Samalla yhdistetään rinnakkaiset siirtymät seuraavasti:

$$\begin{array}{c} q_i \xrightarrow{r} q_j \\ \quad \quad \quad \downarrow s \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} q_i \xrightarrow{r \cup s} q_j \end{array}$$



2. Tiivistyksen päättyessä jäljellä olevaa 2-tilaista automaattia vastaava säännöllinen lauseke muodostetaan seuraavan kuvan esittämällä tavalla:



**Esimerkki:**

