

## T-79.149 Diskreetit rakenteet (2 ov)

Tentti pe 10.12.2004, 9–12 sali T1

Kuulustelija: Pekka Orponen, puh. (451)5246

### LUENTOMONISTE JA HARJOITUSTEHTÄVIEN MALLIRATKAISUT SAA OLLA MUKANA. OHJELMOITAVAT JA MUUT SYMBOLILAS- KENTAKYKYISET LASKIMET KIELLETTY.

1. Tulkitse summa

$$S_n = \binom{2n}{0} + \binom{2n-1}{1} \cdot 2 + \binom{2n-2}{2} \cdot 2^2 + \cdots + \binom{n}{n} \cdot 2^n$$

termin  $z^{2n}$  kertoimeksi sarjassa  $S(z) = \sum_{k \geq 0} z^k (1+2z)^k$  (perustelu!), ja määritä tällä perusteella summan  $S_n$  arvo suljetussa muodossa. 8p.

2. Määritä seuraavat generoivat funktiot suoraan ao. kombinatoristen perheiden rakenteen perusteella:

(a) Tgf jonolle  $\langle a_n \rangle$ , missä  $a_n =$  sellaisten numeroista 1 ja 2 koostuvien merkkijonojen lukumäärä, joiden numeroiden summa on  $n$ . (Laskemalla todetaan, että  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 3$ ,  $a_4 = 5$  jne.) 4p.

(b) Egf jonolle  $\langle b_n \rangle$ , missä  $b_n =$  joukon  $[n] = \{1, \dots, n\}$  binääripuuositusten lukumäärä, so. sellaisten binääripuiden lukumäärä, joiden kussakin solmussa on jokin perusjoukon  $[n]$  epätyhjä osajoukko, joukot ovat erillisiä ja yhdessä kattavat koko perusjoukon. (*Binääripuu* on järjestetty juuretettu puu, jonka jokaiseen solmuun juurtuu kaksi alipuuta, joista jompikumpi tai molemmat voivat olla tyhjiä. Piirtämällä ja laskemalla todetaan, että  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 5$ ,  $b_3 = 43$  jne.) 4p.

3. Arvioi kohtuulliseksi katsomallasi tarkkuudella seuraavien generoivien funktioiden kertoimien asymptoottista kasvunopeutta. Perusta arviosi suoraan funktioiden ominaisuuksiin, ratkaisematta ao. kertoimia eksplisiittisesti.

(a)  $\text{tgf } a(z) = \frac{1}{(1+2z)(1-2z)^2}$ . 4p.

(b)  $\text{egf } \hat{f}(z) = ze^{z^2}$ , 3p.

4. Arvioi Eulerin summakaavan avulla kertomafunktion  $n!$  kasvunopeutta kertaluokan tarkkuudella, so. määritä jokin sellainen algebrallinen lauseke  $f(n)$ , että  $n! = \Theta(f(n))$ . (*Vihje:* Arvioi ensin funktiota  $(n-1)!$ .) 7p.

Yhteensä 30p.