**T-79.3001 Logiikka tietotekniikassa: perusteet** **Kevät 2007**
**Laskuharjoitus 11 (predikaattilogiikka 6.1 – 8.4)**
**24.–26.4.2007**

## Ratkaisuja demotehtäviin

**4.** Määritä seuraavien klausuulijoukkojen Herbrand-universumit ja kannat.

a) $\{\{\neg G(x,c)\}\}$,

b) $\{\{P(f(y),y)\}\}$,

c) $\{\{P(x)\},\ \{\neg P(a),\neg P(b)\}\}$,

d) $\{\{\neg P(x,y),\ \neg P(y,z),\ G(x,z)\}\}$,

e) $\{\{\neg P(x,y)\},\ \{Q(a,x),\ Q(b,f(y))\}\}$, ja

f) $\{\{P(x),\ Q(f(x,y))\}\}$

**Ratk.** Herbrand-universumi $U$ muodostuu termeistä, jotka voidaan muodostaa klausuulijoukossa esiintyvistä vakio- ja funktiosymboleista. Jos klausuulijoukossa ei ole vakiosymboleita, universumiin otetaan jokin vakiosymboli, esimerkiksi $a$ (näin tehdään kohdissa b), d) ja f)). Herbrand-kanta $B$ muodostuu atomisista lauseista, jotka ovat konstruoitavissa klausuulijoukossa esiintyvistä predikaattisymboleista käyttämällä argumentteina Herbrand-universumin $U$ termejä.

a) $U=\{c\}$, $B=\{G(c,c)\}$.

b) $U=\{a,f(a),f(f(a)),\ldots\}$, $B=\{P(e_1,e_2)\,|\,e_1\in U, e_2\in U\}$.

c) $U=\{a,b\}$, $B=\{P(a),P(b)\}$.

d) $U=\{a\}$, $B=\{P(a,a),G(a,a)\}$.

e) $U=\{a,b,f(a),f(b),f(f(a)),f(f(b)),\ldots\}$,
$B=\{P(e_1,e_2)\,|\,e_1\in U,e_2\in U\}\cup\{Q(e_1,e_2)\,|\,e_1\in U,e_2\in U\}$.

f) $U=\{a,f(a,a),f(a,f(a,a)),f(f(a,a),a),f(f(a,a),f(a,a)),\ldots\}$,
$B=\{P(e)\,|\,e\in U\}\cup\{Q(e)\,|\,e\in U\}$.

**5.** Tarkastellaan kaavajoukkoa

$$\Sigma=\{\forall x P(x,a,x),\ \neg\exists x\exists y\exists z(P(x,y,z)\wedge\neg P(x,f(y),f(z)))\}.$$

a) Muunna $\Sigma$ klausuulijoukoksi $S$.

b) Anna $S$:n Herbrand-universumi $H$ sekä Herbrand-kanta $B$.

c) Esitetään Herbrand-struktuurit Herbrand-kannan osajoukkoina. Hae $S$:lle osajoukkorelaatioon, $\subseteq$, nähden minimaalinen ja maksimaalinen Herbrand-malli.

**Ratk.**

a) Lauseesta $\forall x P(x,a,x)$ saadaan klausuuli $\{P(x,a,x)\}$. Lausejoukon toinen lause $\neg(\exists x\exists y\exists z(P(x,y,z)\wedge\neg P(x,f(y),f(z)))$ tuottaa klausuuliin $\{\neg P(x,y,z),P(x,f(y),f(z))\}$. Näin ollen saadaan klausuulijoukko $S=\{\{P(x,a,x)\},\{\neg P(x,y,z),P(x,f(y),f(z))\}\}$.

b) Herbrand-universumi $H=\{a,f(a),f(f(a)),\ldots\}=\{f^n(a)\mid n\geq 0\}$ ja Herbrand-kanta $B=\{P(e_1,e_2,e_3)\mid e_1,e_2,e_3\in H\}$.

c) Maksimaalinen Herbrand-malli $S$:lle saadaan $B$:stä, sillä jokainen termi muotoa $P(f^n(a),a,f^n(a))$, $n\geq 0$ kuuluu $B$:hen (ensimmäinen klausuuli toteutuu), ja jokainen termi muotoa $P(f^n(a),f^{m+1}(a),f^{k+1}(a))$, missä $n,m,k\geq 0$, kuuluu $B$:hen (toinen klausuuli toteutuu).
Minimaalinen Herbrand-malli on $\{P(a,a,a),P(a,f(a),f(a))\}$.

**6.** Muunna ongelma predikaattilogiikan lauseen

$$\exists x\exists y(P(x)\leftrightarrow\neg P(y))\rightarrow\exists x\exists y(\neg P(x)\wedge P(y))$$

pätevyyden selvittämisestä lauselogiikan toteutuvuusongelmaksi ja ratkaise ongelma lauselogiikan menetelmin.

**Ratk.** Muodosta lauseen klausuulimuoto $S$ (äärellinen, ei funktiosymboleja), etsi $S$:n Herbrand universumi $H$ ja edelleen Herbrand-instanssien joukko $S'$ (äärellinen). Tämän voit nähdä lauselogiikan klausuulijoukkona ja käyttää esimerkiksi (lauselogiikan) resoluutiota saadun lauselogiikan klausuulijoukon pätevyyden tarkastelemiseen.

**7.** Laadi substituutioiden $\{x/y,y/b,z/f(x)\}$ ja $\{x/g(a),y/x,w/c\}$ kompositio.

**Ratk.** Substituutioita kompositoitaessa on kiinnitettävä huomiota kahteen asiaan:

- Mikäli tulos olisi muotoa $x/x$, sitä ei kirjata lopputulokseen.
- Jos jälkimmäinen substituutio korvaa samaa muuttujaa kuin edellinen, korvaus suoritetaan ensimmäisen substituution perusteella.

Näin saadaan:

$$\{y/b,z/f(g(a)),w/c\}$$

**8.** Mitkä ovat seuraavien literaalijoukkojen yleisimmät unifioijat?

a) $\{P(x,g(y),f(a)),P(f(y),g(f(z)),z)\}$

b) $\{P(x,f(x),g(y)),P(a,f(g(a)),g(a)),P(y,f(y),g(a))\}$

c) $\{P(x,f(x,y)),P(y,f(y,a)),P(b,f(b,a))\}$

d) $\{P(f(a),y,z),P(y,f(a),b),P(x,y,f(z))\}$

**Ratk.** Sovelletaan unifikaatioalgoritmia vaiheittain:

a) $\sigma_0=\varepsilon$ (tyhjä substituutio)
$S_0=\{P(x,g(y),f(a)),P(f(y),g(f(z)),z)\}$
$D(S_0)=\{x,f(y)\}$
$\sigma_1=\{x/f(y)\}$
$\sigma_0\sigma_1=\{x/f(y)\}$
$S_1=\{P(f(y),g(y),f(a)),P(f(y),g(f(z)),z)\}$
$D(S_1)=\{y,f(z)\}$
$\sigma_2=\{y/f(z)\}$
$\sigma_0\sigma_1\sigma_2=\{x/f(f(z)),y/f(z)\}$
$S_2=\{P(f(f(z)),g(f(z)),f(a)),P(f(f(z)),g(f(z)),z)\}$
$D(S_2)=\{f(a),z\}$
$\sigma_3=\{z/f(a)\}$
$\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3=\{x/f(f(f(a))),y/f(f(a)),z/f(a)\}$
$S_3=\{P(f(f(f(a))),g(f(f(a))),f(a))\}$
Unifiointi onnistui, yleisin unifioija on $\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

b) $\sigma_0=\varepsilon$
$S_0=\{P(x,f(x),g(y)),P(a,f(g(a)),g(a)),P(y,f(y),g(a))\}$
$D(S_0)=\{x,a,y\}$
$\sigma_1=\{x/a\}$
$S_1=\{P(a,f(a),g(y)),P(a,f(g(a)),g(a)),P(y,f(y),g(a))\}$
$D(S_1)=\{a,y\}$
$\sigma_2=\{y/a\}$
$S_2=\{P(a,f(a),g(a)),P(a,f(g(a)),g(a))\}$
$D(S_2)=\{a,g(a)\}$
Termit $a$ ja $g(a)$ eivät unifioidu; unifiointi ei siis onnistu.

c) $\sigma_0=\varepsilon$
$S_0=\{P(x,f(x,y)),P(y,f(y,a)),P(b,f(b,a))\}$
$D(S_0)=\{x,y,b\}$
$\sigma_1=\{x/b\}$
$S_1=\{P(b,f(b,y)),P(y,f(y,a)),P(b,f(b,a))\}$
$D(S_1)=\{b,y\}$
$\sigma_2=\{y/b\}$
$S_2=\{P(b,f(b,b)),P(b,f(b,a))\}$
$D(S_2)=\{b,a\}$
Termit $b$ ja $a$ eivät unifioidu; unifiointi ei onnistu.

d) $\sigma_0=\varepsilon$
$S_0=\{P(f(a),y,z),P(y,f(a),b),P(x,y,f(z))\}$
$D(S_0)=\{f(a),y,x\}$
$\sigma_1=\{y/f(a)\}$
$S_1=\{P(f(a),f(a),z),P(f(a),f(a),b),P(x,f(a),f(z))\}$
$D(S_1)=\{f(a),x\}$
$\sigma_2=\{x/f(a)\}$
$S_2=\{P(f(a),f(a),z),P(f(a),f(a),b),P(f(a),f(a),f(z))\}$
$D(S_2)=\{z,b,f(z)\}$ ($z$:aa ei voi korvata $f(z)$:lla)
$\sigma_3=\{z/b\}$
$S_3=\{P(f(a),f(a),b),P(f(a),f(a),f(b))\}$
$D(S_3)=\{b,f(b)\}$
Termit $b$ ja $f(b)$ eivät unifioidu; unifiointi ei onnistu.

**9.** Osoita, että

a) substituutioiden kompositio ei ole kommutatiivinen, eli että on olemassa substituutiot $\sigma$ ja $\lambda$ s.e. $\sigma\lambda\neq\lambda\sigma$.

b) yleisimmät unifioijat eivät ole yksikäsitteiset, eli että jollekin lausekejoukolle (esim. atomikaavojen joukko) $S$ on olemassa kaksi yleisintä unifioijaa, $\sigma$ ja $\lambda$, s.e. $\sigma\neq\lambda$.

**Ratk.**

a) Olkoon $\sigma=\{x/a\}$ ja $\lambda=\{x/b\}$. Näille pätee $\sigma\lambda\neq\lambda\sigma$.

b) Lausejoukolla $S=\{P(x),P(y)\}$ on olemassa kaksi yleisintä unifioijaa: $\{x/y\}$ ja $\{y/x\}$.

**10.** Unifioi $\{P(x,y,z),P(f(w,w),f(x,x),f(y,y))\}$.

**Ratk.** Yleisimmäksi unifioijaksi saadaan unifikaatioalgoritmiä soveltaen

$$\{x/f(w,w),y/f(f(w,w),f(w,w)),\\ z/f(f(f(w,w),f(w,w)),f(f(w,w),f(w,w)))\}.$$

**11.** Todista resoluutiolla, että ei ole olemassa miesparturia, kun:

a) Jokainen parturi ajaa niiden miesten parrat, jotka eivät itse aja partaansa.

b) Kukaan parturi ei aja niiden miesten partoja, jotka ajavat itse partansa.

**Ratk.** Kuvitellaan, että universumi koostuu joukosta miehiä. Käytetään formalisoinnissa seuraavia predikaatteja: $P(x)$ = "$x$ on parturi" ja $A(x,y)$ = "$x$ ajaa $y$:n parran".

a) $\forall x(P(x) \to \forall y(\neg A(y,y) \to A(x,y)))$,
b) $\forall x(P(x) \to \forall y(A(y,y) \to \neg A(x,y)))$.

Muodostetaan klausuulit:

a) $\forall x(P(x) \to \forall y(\neg A(y,y) \to A(x,y)))$
$\forall x(\neg P(x) \lor \forall y(A(y,y) \lor A(x,y)))$
$\forall x \forall y(\neg P(x) \lor A(y,y) \lor A(x,y))$
$\neg P(x) \lor A(y,y) \lor A(x,y)$
$\{\neg P(x_1),\ A(y_1,y_1),\ A(x_1,y_1)\}$

b) $\forall x(P(x) \to \forall y(A(y,y) \to \neg A(x,y)))$
$\forall x(\neg P(x) \lor \forall y(\neg A(y,y) \lor \neg A(x,y)))$
$\forall x \forall y(\neg P(x) \lor \neg A(y,y) \lor \neg A(x,y))$
$\neg P(x) \lor \neg A(y,y) \lor \neg A(x,y)$
$\{\neg P(x_2),\ \neg A(y_2,y_2),\ \neg A(x_2,y_2)\}$

Halutaan todistaa $\neg \exists x P(x)$ ja siksi muodostetaan lauseen negaatio $\exists x P(x)$. Tämä lause muutetaan klausuulimuotoon $\{P(a)\}$.

Klausuuleista

$$\{\neg P(x_1), A(y_1,y_1), A(x_1,y_1)\} \qquad \text{ja} \qquad \{\neg P(x_2),\ \neg A(y_2,y_2),\ \neg A(x_2,y_2)\}$$

saadaan

$$\{\neg P(x_3)\} \qquad (\text{substituutio } \{x_1/x_3, x_2/x_3, y_1/x_3, y_2/x_3\})$$

Klausuuleista $\{P(a)\}$ ja $\{\neg P(x_3)\}$ saadaan tyhjä klausuuli (substituutio $\{x_3/a\}$). Täten klausuulijoukko on toteutumaton ja $\neg \exists x P(x)$ seuraa loogisesti premisseistä.

**12.** Esitetään luonnolliset luvut 0, 1, 2, 3, ... muuttujattomilla termeillä 0, $s(0)$, $s(s(0))$, ..., jotka rakentuvat vakiosymbolista 0 ja funktiosymbolista $s$, joka tulkitaan funktioksi $s(x) = x + 1$ luonnollisille luvuille $x$.

a) Tarkoittakoon predikaatit $J2(x), J3(x)$ ja $J6(x)$ sitä, että luonnollinen luku $x$ on jaollinen kahdella, kolmella ja kuudella. Määrittele nämä predikaatit predikaattilogiikan lausein siten, että predikaatin $J6$ määritelmä perustuu predikaattien $J2$ ja $J3$ määritelmiin.

b) Todista resoluutiolla, että jos luonnollinen luku $x$ on kahdella ja kolmella jaollinen, niin luonnollinen luku $x + 6$ on kuudella jaollinen.

**Ratk.** Todetaan ensin perustapaukset, s.o. että 0 on kahdella ja kolmella jaollinen.

$$J2(0),$$
$$J3(0).$$

Edelleen, kuinka näistä päätellään jaollisuus suuremmille luvuille:

$$\forall x(J2(x) \to J2(s(s(x)))),$$
$$\forall x(J3(x) \to J3(s(s(s(x))))).$$

Ja lopuksi määritellään kuudella jaollisuus:

$$\forall x(J2(x) \land J3(x) \to J6(x)).$$

Jotta resoluutiota voisi soveltaa, tulee lauseet muuttaa klausuulimuotoon. Tässä tapauksessa se on melko suoraviivaista.

$$\forall x(J2(x) \to J2(s(s(x))))$$
$$\forall x(\neg J2(x) \lor J2(s(s(x)))$$
$$\{\neg J2(x), J2(s(s(x)))\}.$$

Samoin $J3(x)$-predikaatin määrittelevälle lauseelle saadaan $\{\neg J3(x), J3(s(s(s(x))))\}$. Edelleen $J6(x)$:n määrittelevä lause saadaan muotoon:

$$\forall x(J2(x) \land J3(x) \to J6(x))$$
$$\forall x(\neg(J2(x) \land J3(x)) \lor J6(x))$$
$$\forall x(\neg J2(x) \lor \neg J3(x) \lor J6(x))$$
$$\{\neg J2(x), \neg J3(x), J6(x)\}.$$

Kyselyn negaatiosta tulee seuraavat kolme klausuulia:

$$\neg \forall x(J2(x) \land J3(x) \to J6(s^6(x)))$$
$$\neg \forall x(\neg(J2(x) \land J3(x)) \lor J6(s^6(x)))$$
$$\neg \forall x(\neg J2(x) \lor \neg J3(x)) \lor J6(s^6(x)))$$
$$\exists x \neg(\neg J2(x) \lor \neg J3(x) \lor J6(s^6(x)))$$
$$\exists x(J2(x) \land J3(x) \land \neg J6(s^6(x)))$$
$$\{J2(c)\}, \{J3(c)\} \text{ ja } \{\neg J6(s^6(c))\}.$$

Resoluutio laaditaan seuraavasti:

1. $\{J2(c)\}$, P
2. $\{\neg J2(x_1), J2(s(s(x_1)))\}$, P
3. $\{J2(s(s(c)))\}$, 1 & 2, $x_1/c$
4. $\{\neg J2(x_2), J2(s(s(x_2)))\}$, P
5. $\{J2(s^4(c))\}$, 3 & 4, $x_2/s(s(c))$
6. $\{\neg J2(x_3), J2(s(s(x_3)))\}$, P
7. $\{J2(s^6(c))\}$, 5 & 6, $x_3/s^6(c)$
8. $\{J3(c)\}$, P
9. $\{\neg J3(x_4), J3(s(s(s(x_4))))\}$, P
10. $\{J3(s(s(s(c))))\}$, 8 & 9, $x_4/c$
11. $\{\neg J3(x_5), J3(s(s(s(x_5))))\}$, P
12. $\{J3(s^6(c))\}$, 10 & 11, $x_4/s(s(s(c)))$
13. $\{\neg J2(x_6), \neg J3(x_6), J6(x_6)\}$, P
14. $\{\neg J3(s^6(c)), J6(s^6(c))\}$, 7 & 13, $x_6/s^6(c)$
15. $\{J6(s^6(c))\}$, 12 & 14
16. $\{\neg J6(s^6(c))\}$, P
17. $\square$, 15 & 16

Resoluutiosta saatiin tyhjä klausuuli, so. väite pitää paikkansa.