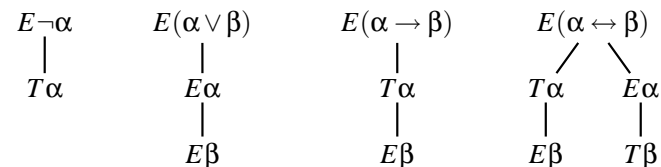
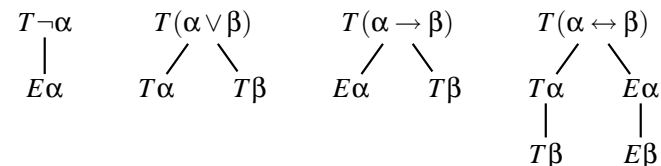


Luento 3: Semanttiset taulut

Sisältö

1. Konnektiivikohtaiset taulusäännöt
2. Semanttisen taulun määritelmä
3. Taulumenetelmän ominaisuuksia
4. Päättely semanttisilla tauluilla

Muiden peruskonnektiivien taulusäännöt

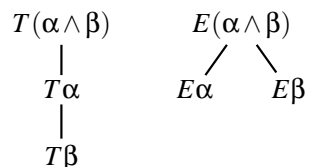


Ajatuksena on, että jokaiselle juurisolmusta lehtisolmuun johtavalle polulle kirjatut totuusarvo vaatimukset ovat yhtäaikaan voimassa.

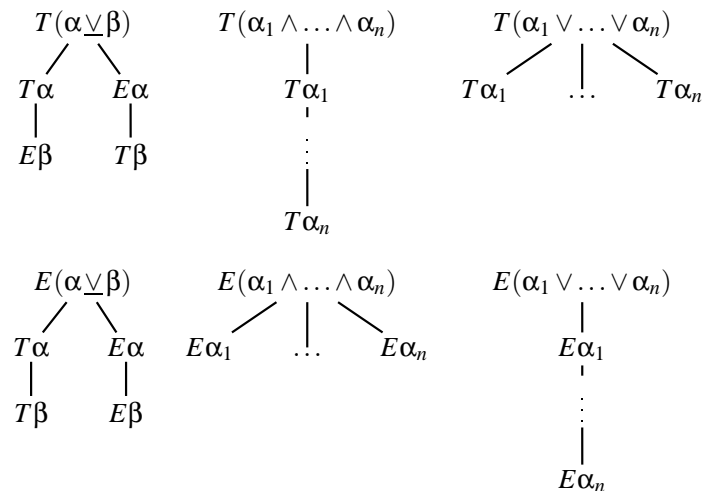
1. KONNEKTIIVIKOHTAISET TAULUSÄÄNNÖT

- Totuustaulukkoja käytetään lauseen ϕ totuusarvon laskemiseen, kun annettuna on atomisten lauseiden $A \in At(\phi)$ totuusarvot.
- Semanttisissa tauluissa idea on käänteinen: määrätään lauseen ϕ alilauseiden totuusarvoja lähtien liikkeelle lauseen ϕ totuusarvosta.
- Verrataan konjunktion totuustaulukkoa ja taulusääntöjä:

α	β	$(\alpha \wedge \beta)$
T	T	T
T	E	E
E	T	E
E	E	E



Muita taulusääntöjä



Taulusäännön instantiointi

- Lausemuodon tunnistaminen on jatkossa olennaista, koska taulusäännön valinta suoritetaan tällä perusteella.

Esimerkki 4.1 Tarkastellaan lausetta $(\neg A \rightarrow C \vee D) \rightarrow A \vee B$:

Lause on muodoltaan implikaatio $\alpha \rightarrow \beta$, missä ehtona on lause $\alpha = \neg A \rightarrow C \vee D$ ja seurauksena lause $\beta = A \vee B$.

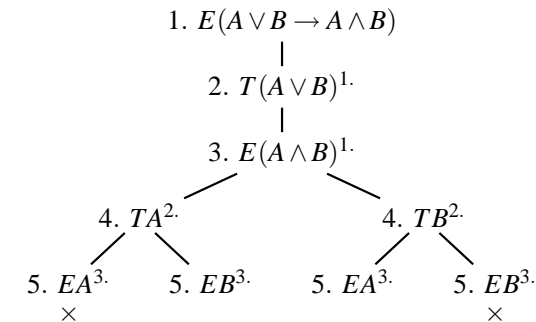
Korvataan α ja β kyseisillä lauseilla implikaation säännössä:

$$\begin{array}{c} T(\alpha \rightarrow \beta) \\ \swarrow \quad \searrow \\ E\alpha \quad T\beta \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} T((\neg A \rightarrow C \vee D) \rightarrow A \vee B) \\ \swarrow \quad \searrow \\ E(\neg A \rightarrow C \vee D) \quad T(A \vee B) \end{array}$$

Esimerkki

- Solmut voidaan numeroida luettavuuden parantamiseksi.
- Tällöin poluille lisättävät solmut numeroidaan juoksevasti.

Esimerkki 4.3 Muodostetaan taulu juurisolmusta $E(A \vee B \rightarrow A \wedge B)$:



2. SEMANTTISEN TAULUN MÄÄRITELMÄ

Määritelmä 4.2 *Semanttinen taulu* muodostetaan seuraavasti:

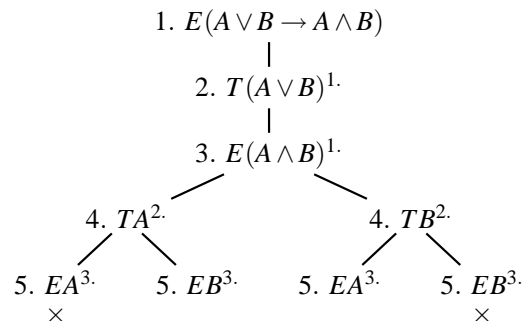
1. Jokainen *yksisolmuinen puu*, jonka ainoana solmuna on juurisolmu $T\phi$ tai $E\phi$, on semanttinen taulu.
2. Jos τ on semanttinen taulu, P on jokin taulun τ polku juurisolmusta lehtisolmuun ja $T\phi$ polun P solmu, niin puurakenne τ' , joka saadaan liittämällä taulusääntö $T\phi$ *ilman juurisolmua* polun P jatkoksi, on myöskin semanttinen taulu.
3. Jos τ on semanttinen taulu, P on jokin taulun τ polku juurisolmusta lehtisolmuun ja $E\phi$ polun P solmu, niin puurakenne τ' , joka saadaan liittämällä taulusääntö $E\phi$ *ilman juurisolmua* polun P jatkoksi, on myöskin semanttinen taulu.

Polkuja ja tauluja koskevia määritelmiä

1. Polun P solmu $T\phi$ ($E\phi$) on *hajoitettu* polulla P , joss
 - (a) ϕ on atominen lause, tai
 - (b) solmun $T\phi$ ($E\phi$) taulusäännön jonkun polun P' jokainen solmu on polulla P .
2. Polku P on *ristiriitainen*, joss sillä esiintyy solmut $T\alpha$ että $E\alpha$ jollekin lauseelle α (tämän merkiksi kirjoitetaan \times polun loppuun).
3. Polku P on *valmis*, joss se on ristiriitainen tai jokainen sen solmuista on hajoitettu polulla P .
4. Taulu τ on *valmis*, joss jokainen sen poluista on valmis.
5. Taulu τ on *ristiriitainen*, joss jokainen sen poluista on ristiriitainen.

Esimerkki

Tarkastellaan edellä muodostettua semanttista taulua:



- Kaikki polut ovat valmiita, mutta vain reunimmat ristiriitaisia.
- Taulu on valmis, muttei ristiriitainen.

© 2008 TKK / Tietojenkäsittelytieteen laitos

Virheettömyys ja täydellisyys

Olkoon $\phi \in \mathcal{L}$ mikä tahansa lause ja τ juurisolmusta $T\phi$ ($E\phi$) muodostettu semanttinen taulu.

Väite 4.13 Jos τ on *valmis* ja sillä on ei-ristiriitainen polku P , *niin* $\mathcal{A} \parallel P$ ja $\mathcal{A} \models \phi$ (vastaavasti $\mathcal{A} \not\models \phi$) jokaiselle totuusjaketulle $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$, joka täyttää seuraavat vaatimukset kaikille atomisille lauseille $A \in \mathcal{P}$:

1. Jos TA esiintyy polulla P , niin $A \in \mathcal{A}$.
2. Jos EA esiintyy polulla P , niin $A \notin \mathcal{A}$.

Väite 4.15 Jos $\mathcal{A} \models \phi$ ($\mathcal{A} \not\models \phi$) jossain totuusjaketussa $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$, *niin* semanttisessa taulussa τ on ei-ristiriitainen polku P siten, että $\mathcal{A} \parallel P$.

© 2008 TKK / Tietojenkäsittelytieteen laitos

3. TAULUMENETELMÄN OMINAISUUKSIA

Olkoon ϕ atomisten lauseiden joukkoon \mathcal{P} perustuvan kielen \mathcal{L} lause.

- Semanttiset taulut ratkaisevat seuraavan loogisen ongelman:
Onko olemassa totuusjaketua $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ siten, että $\mathcal{A} \models \phi$ ($\mathcal{A} \not\models \phi$)?
- Tällaiset totuusjaketut ovat kytköksissä ei-ristiriitaisiin polkuihin.

Määritelmä 4.11 Totuusjaketu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ on *yhteensopiva* semanttisen taulun τ polun P kanssa (merkitään $\mathcal{A} \parallel P$), jos ja vain jos

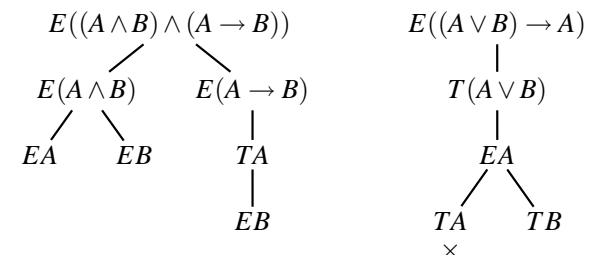
1. $\mathcal{A} \models \alpha$ jokaiselle polun P solmulle $T\alpha$, ja
2. $\mathcal{A} \not\models \beta$ jokaiselle polun P solmulle $E\beta$.

\Rightarrow Yhteensopivuus ristiriitaisen polun kanssa on mahdotonta.

© 2008 TKK / Tietojenkäsittelytieteen laitos

Muutamia havaintoja

- Sama totuusjaketu voi olla yhteensopiva usean ei-ristiriitaisen polun kanssa (vasemmanpuolinen taulu; $\mathcal{A} = \{A\}$).
- Yhteensopivia totuusjaketuja voi olla yksi tai useampia.
- Taulusääntöjen soveltaminen *säilyttää* polkujen kanssa yhteensopivat totuusjaketut (oikeanpuolinen taulu; $\mathcal{A} = \{B\}$).



© 2008 TKK / Tietojenkäsittelytieteen laitos

4. PÄÄTTELY SEMANTTISILLA TAULUILLA

- Lause $\phi \in \mathcal{L}$ on *toteutuva* \iff juurisolmusta $T\phi$ muodostetussa *valmiissa* taulussa on ainakin yksi ei-ristiriitainen polku P .
- Ei-ristiriitaisesta polusta P voidaan eristää malleja \mathcal{A} seuraavasti.
 1. Jos $TA \in P$, niin $A \in \mathcal{A}$.
 2. Jos $EA \in P$, niin $A \notin \mathcal{A}$.
 3. Jos $TA \notin P$ ja $EA \notin P$, niin *valitaan* joko $A \in \mathcal{A}$ tai $A \notin \mathcal{A}$.
- Mallien lukumäärä voi kasvaa eksponentiaalisesti.
- Äärellinen lausejoukko $\Sigma = \{\phi_1, \dots, \phi_n\} \subseteq \mathcal{L}$ on toteutuva \iff lause $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n$ on toteutuva (taulun juureen $T\phi_1, \dots, T\phi_n$).

Semanttisten taulujen todistusmenetelmä

Määritelmä 4.22 Taulu τ on lauseen ϕ *todistus*, jos taulun τ juurisolmuna on $E\phi$ ja τ on ristiriitainen (ja siten myös valmis).

- Jos lauseella ϕ on todistus, sitä kutsutaan *teoreemaksi/todistuvaksi* (merkintä $\vdash \phi$).
- Todistusmenetelmä M on
 1. *virheetön*, jos lauseen ϕ todistettavuudesta menetelmällä M ($\vdash_M \phi$) seuraa lauseen ϕ pätevyys ($\models \phi$).
 2. *täydellinen*, jos lauseen ϕ pätevydestä ($\models \phi$) seuraa lauseen todistettavuus menetelmällä M ($\vdash_M \phi$).
- Semanttisten taulujen menetelmä on virheetön ja täydellinen.
- *Johdettavuudelle* lausejoukosta Σ saadaan: $\Sigma \vdash \phi \iff \Sigma \models \phi$.

Loogisten päätelmien tekeminen

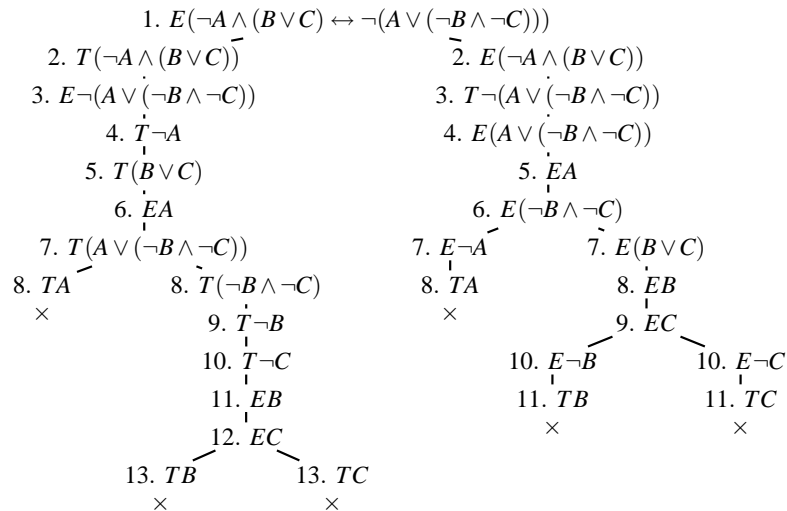
1. Pätevyden tutkiminen: $\models \phi \iff$ juurisolmusta $E\phi$ muodostettu valmis semanttinen taulu on *ristiriitainen*.
2. Looginen seuraavuus: $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \models \phi \iff$ solmuista $T\phi_1, \dots, T\phi_n$ ja $E\phi$ muodostettu valmis taulu on *ristiriitainen*.
3. Loogisen ekvivalenssin tutkiminen: $\phi \equiv \psi \iff$ juurisolmusta $E(\phi \leftrightarrow \psi)$ muodostettu valmis semanttinen taulu on *ristiriitainen*.
4. Äärellisten lausejoukkojen Σ_1 ja Σ_2 ekvivalenssin ristiintarkastus:
 - (a) Jokaiselle lauseelle $\sigma_1 \in \Sigma_1$ tulee osoittaa $\Sigma_2 \models \sigma_1$.
 - (b) Jokaiselle lauseelle $\sigma_2 \in \Sigma_2$ tulee osoittaa $\Sigma_1 \models \sigma_2$.

Huomio Mikäli valmis semanttinen taulu ei ole ristiriitainen, sen ei-ristiriitaisista poluista voidaan muodostaa *vastamalleja*.

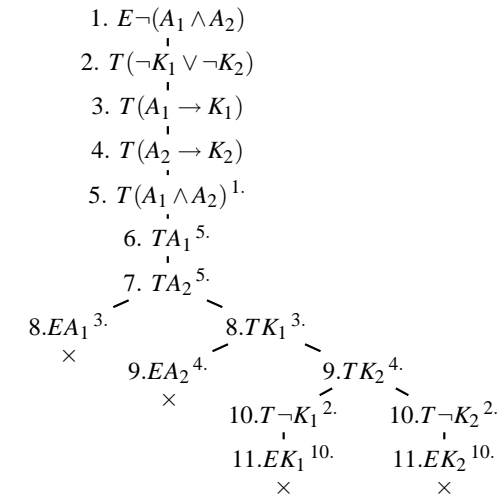
Ohjeita semanttisten taulujen laadintaan:

- Taulun solmussa $T\phi$ (tai $E\phi$) olevan lauseen ϕ rakenne määrää käytettävän taulusäännön: esim. implikaation $\phi = \alpha \rightarrow \beta$ käsittely.
- Polun laajentaminen voidaan lopettaa ristiriidan ilmentymiseen.
- Solmujen hajottamisjärjestys vaikuttaa usein taulun kokoon.
- Taulun koon kasvua kannattaa hillitä seuraavilla periaatteilla:
 1. Hajoitetaan ensisijaisesti solmuja, jotka eivät haarauta taulua.
 2. Hajoitetaan toissijaisesti jäljelle jääviä solmuja, joista syntyvät totuusarvovaatimukset johtavat (välittömään) ristiriitaan.
 3. Viimeisenä hajoitetaan muita (taulua haarauttavia) solmuja.
- Kaikkia lauseita koskevat totuusarvovaatimukset eivät välttämättä ole tarpeen ristiriidan aikaansaamiseen (edes tietyllä polulla)!

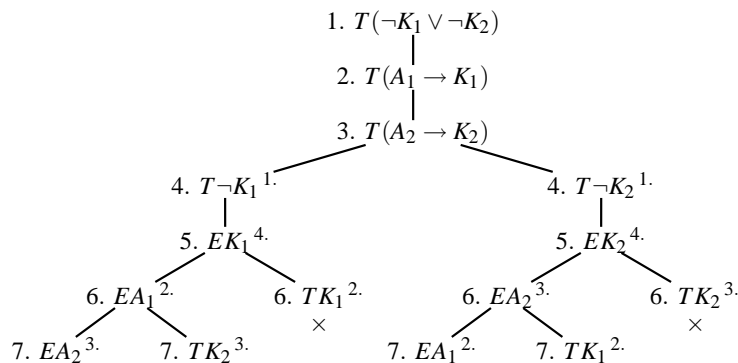
Esimerkki ekvivalenssin osoittamisesta



Loogisen seuraavuuden tutkiminen



Esimerkki mallien hakemisesta



Ei-ristiriitaisista poluista saadaan viisi sallittuja tiloja vastaavaa mallia:

$$\mathcal{A}_1 = \emptyset, \mathcal{A}_2 = \{K_1\}, \mathcal{A}_3 = \{K_1, A_1\}, \mathcal{A}_4 = \{K_2\} \text{ ja } \mathcal{A}_5 = \{K_2, A_2\}.$$

TAVOITTEET

- Osaat muodostaa *valmiin* semanttisen taulun taulusääntöjä soveltamalla, kun juurisolmu(t) on annettu.
- Tunnet joitain periaatteita taulujen koon kasvun hillitsemiseksi.
- Tiedät, miten erilaiset loogiset päättelytehtävät ovat suoritettavissa semanttisten taulujen avulla.
- Mikäli valmiiseen semanttiseen tauluun jää ei-ristiriitaisia polkuja, osaat muodostaa vastamallin atomisia lauseita koskevien totuusarvovaatimusten pohjalta.
- Osaat määritellä, mitä todistusmenetelmän virheettömyys ja täydellisyys tarkoittavat.



PÄIVÄN PÄHKINÄ

Tarkastellaan lauselogiikan lausetta

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (D \rightarrow E) \wedge (E \rightarrow F) \rightarrow (A \rightarrow F).$$

- Osoita lause teoreemaksi semanttisten taulujen menetelmällä.
- Mieti solmujen hajoitussjärjestyksen vaikutusta todistuksen kokoon:
 1. Millä tavoin saat aikaan mahdollisimman pienen todistuksen?
 2. Millainen hajoitussjärjestys johtaa maksimaaliseen kasvuun?