Luento 3: Semanttiset taulut

Sisältö

1. Konnektiivikohtaiset taulusäännöt
2. Semanttisen taulun määritelmä
3. Taulumenetelmän ominaisuuksia
4. Päättely semanttisilla tauluilla

1. KONNEKTIIVIKOHTAISET TAULUSÄÄNNÖT

- Totuustaulukkoja käytetään lauseen ϕ totuusarvon laskemiseen, kun annettuna on atomisten lauseiden $A \in \mathrm{At}(\phi)$ totuusarvot.
- Semanttisissa tauluissa idea on käänteinen: määrätään lauseen ϕ alilauseiden totuusarvoja lähtien liikkeelle lauseen ϕ totuusarvosta.
- Verrataan konjunktion totuustaulukkoa ja taulusääntöjä:

α	β	$(\alpha\land\beta)$
T	T	T
T	E	E
E	T	E
E	E	E

$$\begin{array}{c} T(\alpha\land\beta) \\ | \\ T\alpha \\ | \\ T\beta \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & E(\alpha\land\beta) & \\ / & & \backslash \\ E\alpha & & E\beta \end{array}$$

Muiden peruskonnektiivien taulusäännöt

$$\begin{array}{c} T\neg\alpha \\ | \\ E\alpha \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & T(\alpha\lor\beta) & \\ / & & \backslash \\ T\alpha & & T\beta \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & T(\alpha\rightarrow\beta) & \\ / & & \backslash \\ E\alpha & & T\beta \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & T(\alpha\leftrightarrow\beta) & \\ / & & \backslash \\ T\alpha & & E\alpha \\ | & & | \\ T\beta & & E\beta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} E\neg\alpha \\ | \\ T\alpha \end{array} \qquad \begin{array}{c} E(\alpha\lor\beta) \\ | \\ E\alpha \\ | \\ E\beta \end{array} \qquad \begin{array}{c} E(\alpha\rightarrow\beta) \\ | \\ T\alpha \\ | \\ E\beta \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & E(\alpha\leftrightarrow\beta) & \\ / & & \backslash \\ T\alpha & & E\alpha \\ | & & | \\ E\beta & & T\beta \end{array}$$

Ajatuksena on, että jokaiselle juurisolmusta lehtisolmuun johtavalle *polulle* kirjatut totuusarvovaatimukset ovat yhtäaikaa voimassa.

Muita taulusääntöjä

$$\begin{array}{ccc} & T(\alpha\underline{\lor}\beta) & \\ / & & \backslash \\ T\alpha & & E\alpha \\ | & & | \\ E\beta & & T\beta \end{array} \qquad \begin{array}{c} T(\alpha_1\land\ldots\land\alpha_n) \\ | \\ T\alpha_1 \\ \vdots \\ | \\ T\alpha_n \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & T(\alpha_1\lor\ldots\lor\alpha_n) & & \\ / & & | & & \backslash \\ T\alpha_1 & & \ldots & & T\alpha_n \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & E(\alpha\underline{\lor}\beta) & \\ / & & \backslash \\ T\alpha & & E\alpha \\ | & & | \\ T\beta & & E\beta \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & E(\alpha_1\land\ldots\land\alpha_n) & & \\ / & & | & & \backslash \\ E\alpha_1 & & \ldots & & E\alpha_n \end{array} \qquad \begin{array}{c} E(\alpha_1\lor\ldots\lor\alpha_n) \\ | \\ E\alpha_1 \\ \vdots \\ | \\ E\alpha_n \end{array}$$

Taulusäännön instantiointi

➤ Lausemuodon tunnistaminen on jatkossa olennaista, koska taulusäännön valinta suoritetaan tällä perusteella.

Esimerkki 4.1 Tarkastellaan lausetta $(\neg A \rightarrow C \vee D) \rightarrow A \vee B$:

Lause on muodoltaan implikaatio $\alpha \rightarrow \beta$, missä ehtona on lause $\alpha = \neg A \rightarrow C \vee D$ ja seurauksena lause $\beta = A \vee B$.

Korvataan α ja β kyseisillä lauseilla implikaation säännössä:

$$\begin{array}{ccc} & T(\alpha \rightarrow \beta) & \\ & / \quad \backslash & \\ E\alpha & & T\beta \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} & T((\neg A \rightarrow C \vee D) \rightarrow A \vee B) & \\ & / \quad \backslash & \\ E(\neg A \rightarrow C \vee D) & & T(A \vee B) \end{array}$$

2. SEMANTTISEN TAULUN MÄÄRITELMÄ

Määritelmä 4.2 *Semanttinen taulu* muodostetaan seuraavasti:

1. Jokainen *yksisolmuinen puu*, jonka ainoana solmuna on juurisolmu $T\phi$ tai $E\phi$, on semanttinen taulu.
2. Jos τ on semanttinen taulu, P on jokin taulun τ polku juurisolmusta lehtisolmuun ja $T\phi$ polun P solmu, niin puurakenne τ', joka saadaan liittämällä taulusääntö $T\phi$ *ilman juurisolmua* polun P jatkoksi, on myöskin semanttinen taulu.
3. Jos τ on semanttinen taulu, P on jokin taulun τ polku juurisolmusta lehtisolmuun ja $E\phi$ polun P solmu, niin puurakenne τ', joka saadaan liittämällä taulusääntö $E\phi$ *ilman juurisolmua* polun P jatkoksi, on myöskin semanttinen taulu.

Esimerkki

➤ Solmut voidaan numeroida luettavuuden parantamiseksi.

➤ Tällöin poluille lisättävät solmut numeroidaan juoksevasti.

Esimerkki 4.3 Muodostetaan taulu juurisolmusta $E(A \vee B \rightarrow A \wedge B)$:

$$\begin{array}{cccc} & \text{1. } E(A \vee B \rightarrow A \wedge B) & & \\ & | & & \\ & \text{2. } T(A \vee B)^{1.} & & \\ & | & & \\ & \text{3. } E(A \wedge B)^{1.} & & \\ \text{4. } TA^{2.} & & \text{4. } TB^{2.} & \\ \text{5. } EA^{3.} \quad \text{5. } EB^{3.} & & \text{5. } EA^{3.} \quad \text{5. } EB^{3.} & \\ \times \qquad\qquad\quad & & \qquad\qquad\quad \times & \end{array}$$

Polkuja ja tauluja koskevia määritelmiä

1. Polun P solmu $T\phi$ ($E\phi$) on *hajoitettu* polulla P, joss
   (a) ϕ on atominen lause, tai
   (b) solmun $T\phi$ ($E\phi$) taulusäännön jonkun polun P' jokainen solmu on polulla P.
2. Polku P on *ristiriitainen*, joss sillä esiintyy solmut $T\alpha$ että $E\alpha$ jollekin lauseelle α (tämän merkiksi kirjoitetaan $\times$ polun loppuun).
3. Polku P on *valmis*, joss se on ristiriitainen tai jokainen sen solmuista on hajoitettu polulla P.
4. Taulu τ on *valmis*, joss jokainen sen poluista on valmis.
5. Taulu τ on *ristiriitainen*, joss jokainen sen poluista on ristiriitainen.

Esimerkki

Tarkastellaan edellä muodostettua semanttista taulua:

- 1. $E(A \vee B \to A \wedge B)$
  - 2. $T(A \vee B)^{1.}$
    - 3. $E(A \wedge B)^{1.}$
      - 4. $TA^{2.}$
        - 5. $EA^{3.}$ $\times$
        - 5. $EB^{3.}$
      - 4. $TB^{2.}$
        - 5. $EA^{3.}$
        - 5. $EB^{3.}$ $\times$

➤ Kaikki polut ovat valmiita, mutta vain reunimmaiset ristiriitaisia.

➤ Taulu on valmis, muttei ristiriitainen.

3. TAULUMENETELMÄN OMINAISUUKSIA

Olkoon ϕ atomisten lauseiden joukkoon $\mathcal{P}$ perustuvan kielen $\mathcal{L}$ lause.

➤ Semanttiset taulut ratkaisevat seuraavan loogisen ongelman:

Onko olemassa totuusjakelua $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ siten, että $\mathcal{A} \models \phi$ ($\mathcal{A} \not\models \phi$)?

➤ Tällaiset totuusjakelut ovat kytköksissä ei-ristiriitaisiin polkuihin.

Määritelmä 4.11 Totuusjakelu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ on *yhteensopiva* semanttisen taulun τ polun P kanssa (merkitään $\mathcal{A} \| P$), jos ja vain jos

1. $\mathcal{A} \models \alpha$ jokaiselle polun P solmulle $T\alpha$, ja
2. $\mathcal{A} \not\models \beta$ jokaiselle polun P solmulle $E\beta$.

$\Longrightarrow$ Yhteensopivuus ristiriitaisen polun kanssa on mahdotonta.

Virheettömyys ja täydellisyys

Olkoon $\phi \in \mathcal{L}$ mikä tahansa lause ja τ juurisolmusta $T\phi$ ($E\phi$) muodostettu semanttinen taulu.

Väite 4.13 *Jos* τ on *valmis* ja sillä on ei-ristiriitainen polku P, *niin* $\mathcal{A} \| P$ ja $\mathcal{A} \models \phi$ (vastaavasti $\mathcal{A} \not\models \phi$) jokaiselle totuusjakelulle $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$, joka täyttää seuraavat vaatimukset kaikille atomisille lauseille $A \in \mathcal{P}$:

1. Jos TA esiintyy polulla P, niin $A \in \mathcal{A}$.
2. Jos EA esiintyy polulla P, niin $A \notin \mathcal{A}$.

Väite 4.15 *Jos* $\mathcal{A} \models \phi$ ($\mathcal{A} \not\models \phi$) jossain totuusjakelussa $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$, *niin* semanttisessa taulussa τ on ei-ristiriitainen polku P siten, että $\mathcal{A} \| P$.

Muutamia havaintoja

➤ Sama totuusjakelu voi olla yhteensopiva usean ei-ristiriitaisen polun kanssa (vasemmanpuolinen taulu; $\mathcal{A} = \{A\}$).

➤ Yhteensopivia totuusjakeluja voi olla yksi tai useampia.

➤ Taulusääntöjen soveltaminen *säilyttää* polkujen kanssa yhteensopivat totuusjakelut (oikeanpuolinen taulu; $\mathcal{A} = \{B\}$).

- $E((A \wedge B) \wedge (A \to B))$
  - $E(A \wedge B)$
    - EA
    - EB
  - $E(A \to B)$
    - TA
      - EB

- $E((A \vee B) \to A)$
  - $T(A \vee B)$
    - EA
      - TA $\times$
      - TB

4. PÄÄTTELY SEMANTTISILLA TAULUILLA

- Lause $\phi \in \mathcal{L}$ on toteutuva $\iff$ juurisolmusta $T\phi$ muodostetussa *valmiissa* taulussa on ainakin yksi ei-ristiriitainen polku P.
- Ei-ristiriitaisesta polusta P voidaan eristää malleja $\mathcal{A}$ seuraavasti.
  1. Jos $TA \in P$, niin $A \in \mathcal{A}$.
  2. Jos $EA \in P$, niin $A \notin \mathcal{A}$.
  3. Jos $TA \notin P$ ja $EA \notin P$, niin *valitaan* joko $A \in \mathcal{A}$ tai $A \notin \mathcal{A}$.
- Mallien lukumäärä voi kasvaa eksponentiaalisesti.
- Äärellinen lausejoukko $\Sigma = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subseteq \mathcal{L}$ on toteutuva $\iff$ lause $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$ on toteutuva (taulun juureen $T\phi_1, \cdots, T\phi_n$).

Loogisten päätelmien tekeminen

1. Pätevyyden tutkiminen: $\models \phi \iff$ juurisolmusta $E\phi$ muodostettu valmis semanttinen taulu on *ristiriitainen*.
2. Looginen seuraavuus: $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \models \phi \iff$ solmuista $T\phi_1, \cdots, T\phi_n$ ja $E\phi$ muodostettu valmis taulu on *ristiriitainen*.
3. Loogisen ekvivalenssin tutkiminen: $\phi \equiv \psi \iff$ juurisolmusta $E(\phi \leftrightarrow \psi)$ muodostettu valmis semanttinen taulu on *ristiriitainen*.
4. Äärellisten lausejoukkojen Σ_1 ja Σ_2 ekvivalenssin ristiintarkastus:
   (a) Jokaiselle lauseelle $\sigma_1 \in \Sigma_1$ tulee osoittaa $\Sigma_2 \models \sigma_1$.
   (b) Jokaiselle lauseelle $\sigma_2 \in \Sigma_2$ tulee osoittaa $\Sigma_1 \models \sigma_2$.

Huomio Mikäli valmis semanttinen taulu ei ole ristiriitainen, sen ei-ristiriitaisista poluista voidaan muodostaa *vastamalleja*.

Semanttisten taulujen todistusmenetelmä

Määritelmä 4.22 Taulu τ on lauseen ϕ *todistus*, jos taulun τ juurisolmuna on $E\phi$ ja τ on ristiriitainen (ja siten myös valmis).

- Jos lauseella ϕ on todistus, sitä kutsutaan *teoreemaksi/todistuvaksi* (merkintä $\vdash \phi$).
- Todistusmenetelmä M on
  1. *virheetön*, jos lauseen ϕ todistettavuudesta menetelmällä M ($\vdash_M \phi$) seuraa lauseen ϕ pätevyys ($\models \phi$).
  2. *täydellinen*, jos lauseen ϕ pätevyydestä ($\models \phi$) seuraa lauseen todistettavuus menetelmällä M ($\vdash_M \phi$)
- Semanttisten taulujen menetelmä on virheetön ja täydellinen.
- *Johdettavuudelle* lausejoukosta Σ saadaan: $\Sigma \vdash \phi \iff \Sigma \models \phi$.

Ohjeita semanttisten taulujen laadintaan:

- Taulun solmussa $T\phi$ (tai $E\phi$) olevan lauseen ϕ rakenne määrää käytettävän taulusäännön: esim. implikaation $\phi = \alpha \rightarrow \beta$ käsittely.
- Polun laajentaminen voidaan lopettaa ristiriidan ilmentymiseen.
- Solmujen hajoittamisjärjestys vaikuttaa usein taulun kokoon.
- Taulun koon kasvua kannattaa hillitä seuraavilla periaatteilla:
  1. Hajoitetaan ensisijaisesti solmuja, jotka eivät haarauta taulua.
  2. Hajoitetaan toissijaisesti jäljelle jääviä solmuja, joista syntyvät totuusarvovaatimukset johtavat (välittömään) ristiriitaan.
  3. Viimeisenä hajoitetaan muita (taulua haarauttavia) solmuja.
- Kaikkia lauseita koskevat totuusarvovaatimukset eivät välttämättä ole tarpeen ristiriidan aikaansaamiseen (edes tietyllä polulla)!

Esimerkki ekvivalenssin osoittamisesta

- $1.\ E(\neg A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow \neg(A \vee (\neg B \wedge \neg C)))$
  - $2.\ T(\neg A \wedge (B \vee C))$
    $3.\ E\neg(A \vee (\neg B \wedge \neg C))$
    $4.\ T\neg A$
    $5.\ T(B \vee C)$
    $6.\ EA$
    $7.\ T(A \vee (\neg B \wedge \neg C))$
    - $8.\ TA$
      $\times$
    - $8.\ T(\neg B \wedge \neg C)$
      $9.\ T\neg B$
      $10.\ T\neg C$
      $11.\ EB$
      $12.\ EC$
      - $13.\ TB$
        $\times$
      - $13.\ TC$
        $\times$
  - $2.\ E(\neg A \wedge (B \vee C))$
    $3.\ T\neg(A \vee (\neg B \wedge \neg C))$
    $4.\ E(A \vee (\neg B \wedge \neg C))$
    $5.\ EA$
    $6.\ E(\neg B \wedge \neg C)$
    - $7.\ E\neg A$
      $8.\ TA$
      $\times$
    - $7.\ E(B \vee C)$
      $8.\ EB$
      $9.\ EC$
      - $10.\ E\neg B$
        $11.\ TB$
        $\times$
      - $10.\ E\neg C$
        $11.\ TC$
        $\times$

Esimerkki mallien hakemisesta

- $1.\ T(\neg K_1 \vee \neg K_2)$
  $2.\ T(A_1 \rightarrow K_1)$
  $3.\ T(A_2 \rightarrow K_2)$
  - $4.\ T\neg K_1{}^{1.}$
    $5.\ EK_1{}^{4.}$
    - $6.\ EA_1{}^{2.}$
      - $7.\ EA_2{}^{3.}$
      - $7.\ TK_2{}^{3.}$
    - $6.\ TK_1{}^{2.}$
      $\times$
  - $4.\ T\neg K_2{}^{1.}$
    $5.\ EK_2{}^{4.}$
    - $6.\ EA_2{}^{3.}$
      - $7.\ EA_1{}^{2.}$
      - $7.\ TK_1{}^{2.}$
    - $6.\ TK_2{}^{3.}$
      $\times$

Ei-ristiriitaisista poluista saadaa viisi sallittuja tiloja vastaavaa mallia:

$$\mathcal{A}_1 = \emptyset,\ \mathcal{A}_2 = \{K_1\},\ \mathcal{A}_3 = \{K_1, A_1\},\ \mathcal{A}_4 = \{K_2\} \text{ ja } \mathcal{A}_5 = \{K_2, A_2\}.$$

Loogisen seuraavuuden tutkiminen

- $1.\ E\neg(A_1 \wedge A_2)$
  $2.\ T(\neg K_1 \vee \neg K_2)$
  $3.\ T(A_1 \rightarrow K_1)$
  $4.\ T(A_2 \rightarrow K_2)$
  $5.\ T(A_1 \wedge A_2)^{1.}$
  $6.\ TA_1{}^{5.}$
  $7.\ TA_2{}^{5.}$
  - $8. EA_1{}^{3.}$
    $\times$
  - $8. TK_1{}^{3.}$
    - $9. EA_2{}^{4.}$
      $\times$
    - $9. TK_2{}^{4.}$
      - $10. T\neg K_1{}^{2.}$
        $11. EK_1{}^{10.}$
        $\times$
      - $10. T\neg K_2{}^{2.}$
        $11. EK_2{}^{10.}$
        $\times$

TAVOITTEET

- Osaat muodostaa *valmiin* semanttisen taulun taulusääntöjä soveltamalla, kun juurisolmu(t) on annettu.
- Tunnet joitain periaatteita taulujen koon kasvun hillitsemiseksi.
- Tiedät, miten erilaiset loogiset päättelytehtävät ovat suoritettavissa semanttisten taulujen avulla.
- Mikäli valmiiseen semanttiseen tauluun jää ei-ristiriitaisia polkuja, osaat muodostaa vastamallin atomisia lauseita koskevien totuusarvovaatimusten pohjalta.
- Osaat määritellä, mitä todistusmenetelmän virheettömyys ja täydellisyys tarkoittavat.

PÄIVÄN PÄHKINÄ

Tarkastellaan lauselogiikan lausetta

$$(A \to B) \land (B \to C) \land (C \to D) \land (D \to E) \land (E \to F) \to (A \to F).$$

- Osoita lause teoreemaksi semanttisten taulujen menetelmällä.
- Mieti solmujen hajoitusjärjestyksen vaikutusta todistuksen kokoon:
  1. Millä tavoin saat aikaan mahdollisimman pienen todistuksen?
  2. Millainen hajoitusjärjestys johtaa maksimaaliseen kasvuun?