Luento 7: Predikaattilogiikan syntaksi ja semantiikka

1. Predikaattilogiikan aakkosto
2. Kielen määritelmä
3. Kaavojen muodostaminen
4. Kvanttoreihin liittyviä määritelmiä
5. Struktuurit
6. Totuusmääritelmä

Motivaatio

➤ Lauselogiikka on useisiin tarkoituksiin liian yksinkertainen:
$A =$ "a on viallinen", $B =$ "b on viallinen", $C =$ "c on viallinen".
"Kaikki ovat viallisia". $A \wedge B \wedge C$ vs. $\forall x V(x)$
"Jokin on viallinen". $A \vee B \vee C$ vs. $\exists x V(x)$

➤ Erityisesti objektien välisten suhteiden kuvaaminen on hankalaa:
$C_d =$ "c on suurempi kuin d", $D_e =$ "d on suurempi kuin e", ...
"Jos x on suurempi kuin y ja y on suurempi kuin z,
niin x on suurempi kuin z".
$(C_d \wedge D_e \rightarrow C_e) \wedge (C_e \wedge E_d \rightarrow C_d) \wedge (D_e \wedge E_c \rightarrow D_c) \wedge \cdots$
vs. $\forall x \forall y \forall z (S(x,y) \wedge S(y,z) \rightarrow S(x,z))$

1. PREDIKAATTILOGIIKAN AAKKOSTO

Predikaattilogiikan kielessä $\mathcal{L}$ käytetään seuraavia symboleja:

1. Muuttujasymbolit $\mathcal{V} = \{x, y, z, \ldots\}$
2. Vakiosymbolit $\mathcal{C} = \{a, b, c, \ldots\}$
3. Funktiosymbolit $\mathcal{F} = \{f, g, h, \ldots\}$
4. Predikaattisymbolit $\mathcal{P} = \{=, P, Q, R, \ldots\}$
5. Lauselogiikan konnektiivit $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
6. Kvanttorisymbolit $\exists$ (jollekin) ja $\forall$ (kaikille)
7. Sulut "(", ")" ja pilkku ","

Funktio- ja predikaattisymbolien paikkaluvut

➤ Jokaisella funktiosymbolilla $f \in \mathcal{F}$ on *paikkaluku* $n > 0$ (joka määrää f:n argumenttien lukumäärän).

➤ Vastaavasti predikaattisymboleilla $P \in \mathcal{P}$ on paikkaluvut $n \geq 0$.

➤ Määritellään paikkalukukohtaiset symbolijoukot:

$$\mathcal{F}_n = \{f \in \mathcal{F} \mid \text{symbolin } f \text{ paikkaluku on } n > 0\}$$
$$\mathcal{P}_n = \{P \in \mathcal{P} \mid \text{symbolin } P \text{ paikkaluku on } n \geq 0\}$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{F} = \bigcup_{n>0} \mathcal{F}_n$ ja $\mathcal{P} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{P}_n$.

➤ Vakiosymbolien joukko $\mathcal{C}$ voitaisiin vaihtoehtoisesti määritellä 0-paikkaisten funktiosymbolien joukkona $\mathcal{F}_0$.

➤ Joukon $\mathcal{P}_0$ symbolit vastaavat lauselogiikan atomisia lauseita.

2. KIELEN MÄÄRITELMÄ

➤ Predikaattilogiikan kielen $\mathcal{L}$ määritelmä on kolmitasoinen.

Määritelmä 9.1

1. Jokainen muuttujasymboli $v \in \mathcal{V}$ on *termi*.
2. Jokainen vakiosymboli $c \in \mathcal{C}$ on *termi*.
3. Jos $f \in \mathcal{F}_n$ on n-paikkainen funktiosymboli ja $t_1, \ldots, t_n$ ovat termejä, niin myös $f(t_1, \ldots, t_n)$ on *termi*.
4. Muita termejä ei ole.

Esimerkki 9.2 x, c, $f(x)$, $f(f(f(f(f(x)))))$, $g(f(x), g(f(x), g(x,c)))$.

Määritelmä 9.3 *Muuttujattomassa termissä* ei esiinny muuttujia.

Atomikaavat

Määritelmä 9.4

1. Jos t_0 ja t_1 ovat termejä, niin $t_0 = t_1$ on *atomikaava*.
2. Jos $P \in \mathcal{P}_0$ on 0-paikkainen predikaattisymboli, niin P on *atomikaava*.
3. Jos $P \in \mathcal{P}_n$ on n-paikkainen predikaattisymboli (missä $n > 0$) ja $t_1, \ldots, t_n$ ovat termejä, niin $P(t_1, \ldots, t_n)$ on *atomikaava*.
4. Muita atomikaavoja ei ole.

Esimerkki 9.5 Atomikaavoja ovat mm.

$$P(x), \quad Q, \quad x = y, \quad g(x,y) = f(f(c_1)),$$
$$R(c,x,y) \text{ ja } S(x,c,f(x),h(f(x),c,x),y,c,z).$$

Kaavat

Määritelmä 9.6

1. Jokainen atomikaava ϕ on *kaava*.
2. Jos ϕ ja ψ ovat kaavoja ja x on muuttuja, niin myös
$$(\neg\phi),\ (\phi \lor \psi),\ (\phi \land \psi),\ (\phi \to \psi),\ (\phi \leftrightarrow \psi),\ (\forall x \phi),\ (\exists x \phi)$$
ovat *kaavoja*.
3. Muita kaavoja ei ole.

Esimerkki 9.7 Predikaattilogiikan kaavoja ovat esim.

$$P(c),\ (\forall x(P(x) \to Q(x,x))) \text{ ja } (\forall x(P(x) \lor (\exists y Q(x,y)))).$$

Huomio Jokainen predikaattilogiikan *kieli* $\mathcal{L}$ on tiettyihin symbolijoukkoihin $\mathcal{V}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{P}$ perustuva kaavojen joukko!

Kaavojen jäsentäminen

➤ Konnektiivien *presedenssiluokat* ovat seuraavat:

1. $\neg$, $\forall x$ ja $\exists x$ (missä $x \in \mathcal{V}$) ovat vahvimmat konnektiivit.
2. $\lor$ ja $\land$ ovat näitä heikompia, mutta vahvempia kuin $\to$ ja $\leftrightarrow$.
3. $\to$ ja $\leftrightarrow$ ovat heikoimmat konnektiivit.

➤ Predikaattilogiikan kaavoilla on yksikäsitteinen *jäsennyspuu* (poislukien ketjukonjunktioiden ja -disjunktioiden tapaus).

➤ Kaavan *muodon* määrää jäsennyspuun juuressa oleva konnektiivi.

Esimerkki 9.9 Sulkeiden käyttöön liittyvillä sopimuksilla kaava

$$(\exists x(\forall y((\exists z(P(x,z) \land P(z,y))) \to ((Q(x) \lor Q(y)) \lor R(x,y)))))$$

voidaan kirjoittaa $\exists x \forall y(\exists z(P(x,z) \land P(z,y)) \to Q(x) \lor Q(y) \lor R(x,y))$.

3. KAAVOJEN MUODOSTAMINEN

1. Tunnistetaan kuvattavaan järjestelmään liittyvät objektit:
   — Otetaan käyttöön vakiosymboli jokaiselle objektille, johon on tarve viitata erikseen, eli *nimetään* tarvittavat objektit.
   — Mikäli objektien välillä on *funktionaalisia riippuvuuksia*, otetaan käyttöön vastaavat funktiosymbolit.
2. Tutkitaan millaisia *relaatioita* objektien välillä on ja otetaan käyttöön näitä vastaavat predikaattisymbolit.
3. Kuvataan relaatiot ja niiden väliset riippuvuudet kirjoittamalla niille *määritelmät* predikaattilogiikan kaavoina.

Objektien välisten suhteiden kuvaaminen

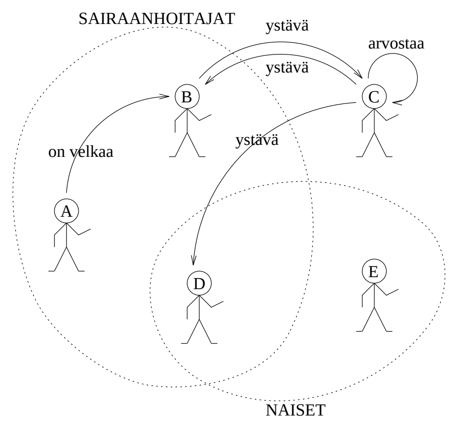
Esimerkki 9.10 Kuvataan esinejoukkoa seuraavin symbolein:

$$t = \text{“tuoli”},$$
$$h = \text{“hattu”},$$
$$s = \text{“sateenvarjo” ja}$$
$$P(x,y) = \text{“esine } x \text{ on esineen } y \text{ päällä”}.$$

Tulkitaan seuraavat väittämät luonnolliselle kielelle:

$\neg P(s,t)$:	Sateenvarjo ei ole tuolin päällä.
$\exists x P(x,h)$:	Hatun päällä on jotakin.
$\exists x \forall y \neg P(y,x)$:	Jonkin päällä ei ole mitään.
$\forall x (P(x,h) \to P(x,t))$:	Kaikki hatun päällä oleva on tuolin päällä.

Esimerkki 9.11



$\exists x \exists y (Y(x,y) \land Y(y,x))$

$\exists x \exists y (S(x) \land S(y) \land V(x,y))$

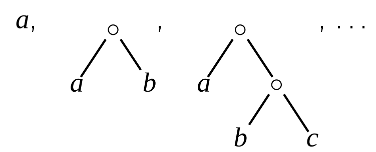
$\exists x A(x,x) \land \exists x (S(x) \land N(x))$

$\neg \forall x (S(x) \to N(x))$

$\forall x (Y(x,c) \to V(a,x))$

Induktiivisten tietorakenteiden esittäminen

1. Luonnolliset luvut: vakiosymboli 0 ja funktiosymboli $s \in \mathcal{F}_1$.
   —*Termit* $0, s(0), s(s(0)), \ldots$ vastaavat luonnollisia lukuja $0, 1, 2, \ldots$
2. Listat: vakiosymboli e (tyhjä lista) ja funktiosymboli $c \in \mathcal{F}_2$.
   —*Termit* $e, c(a,e), c(a,c(b,e)), \ldots$ vastaavat listoja $[\,], [a], [a,b], \ldots$
3. Binääripuut: funktiosymbolit $l \in \mathcal{F}_1$ (lehdet) ja $t \in \mathcal{F}_2$ (sisäsolmut).
   —*Termit* $l(a), t(l(a), l(b)), t(l(a), t(l(b), l(c))), \ldots$ vastaavat puita



4. KVANTTOREIHIN LIITTYVIÄ MÄÄRITELMIÄ

Määritelmä 9.13 Kaavan *alikaavat* määräytyvät seuraavasti:

1. Atomisen kaavan ψ ainoa alikaava on ψ itse.
2. Kaavan $\neg\psi$ alikaavoja ovat $\neg\psi$ sekä kaavan ψ alikaavat.
3. Kaavan $\exists x\psi$ $(\forall x\psi)$ alikaavoja ovat $\exists x\psi$ $(\forall x\psi)$ sekä kaavan ψ alikaavat.
4. Kaavan $(\alpha * \beta)$, missä $*$ on jokin konnektiiveista $\lor$, $\land$, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$, alikaavoja ovat $(\alpha * \beta)$ sekä kaavojen α ja β alikaavat.

Määritelmä 9.15 Olkoot $\exists x\psi$ ja $\forall x\phi$ predikaattilogiikan kaavoja.

1. Kvanttorin $\forall x$ *vaikutusalue* kaavassa $\forall x\psi$ on alikaava ψ.
2. Kvanttorin $\exists x$ *vaikutusalue* kaavassa $\exists x\psi$ on alikaava ψ.

Sidotut ja vapaat muuttujaesiintymät

- Kvanttorisymbolin yhteydessä esiintyvä muuttuja x on *sidottu*.
- Kvanttorin $\forall x$ (vastaavasti $\exists x$) vaikutusalueessa oleva muuttujan x esiintymä on *sidottu*.
- Jos muuttujan x esiintymä ei ole sidottu, niin se on *vapaa*.

Esimerkki 9.17 Tarkastellaan muuttujaesiintymiä kaavassa

$$\forall \overbrace{x}^{\text{sid.}}(P(\overbrace{x}^{\text{sid.}},\overbrace{y}^{\text{vap.}},\overbrace{z}^{\text{vap.}})\lor\exists\overbrace{y}^{\text{sid.}}(Q(\overbrace{y}^{\text{sid.}})\rightarrow R(\overbrace{x}^{\text{sid.}},\overbrace{z}^{\text{vap.}}))).$$

Määritelmä 9.19 Predikaattilogiikan kielen $\mathcal{L}$ kaavat, joissa ei ole vapaita muuttujaesiintymiä, ovat *lauseita*.

Termin sijoittaminen kaavaan

Määritelmä 9.21 Olkoon $\phi(x)$ kaava ja t termi.

1. Kaavalla $\phi(t)$ tarkoitetaan kaavaa $\phi(x)$, jossa jokainen muuttujan x vapaa esiintymä kaavassa $\phi(x)$ on korvattu termillä t.
2. Termi t on *sijoitettavissa* kaavaan $\phi(x)$, jos termin t kaikki muuttujaesiintymät säilyvät vapaina kaavassa $\phi(t)$.

Esimerkki 9.22 Olkoon $\phi(y) = \exists x(P(x,y)\lor Q(y,x))$.

1. Sijoittamalla *muuttujattomat termit* c ja $f(f(d))$ kaavaan $\phi(y)$ saadaan $\phi(c) = \exists x(P(x,c)\lor Q(c,x))$ ja
$$\phi(f(f(d))) = \exists x(P(x,f(f(d)))\lor Q(f(f(d)),x)).$$
2. Termi $f(x)$ ei ole sijoitettavissa kaavaan $\phi(y)$.

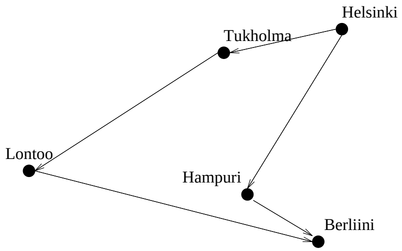
5. STRUKTUURIT

- Totuusjakelut korvataan predikaattilogiikassa struktuureilla.
- Struktuuri ymmärretään edelleen yhden *asiaintilan* kuvauksena.

Määritelmä 10.1 *Struktuuri* (rakenne) $\mathcal{S}$ kielelle $\mathcal{L}$ koostuu universumista U sekä symbolien tulkinnoista universumin suhteen:

1. Vakiosymbolin $c \in \mathcal{C}$ tulkintana on jokin universumin alkio $c^{\mathcal{S}} \in U$.
2. Muuttujasymbolin $v \in \mathcal{V}$ tulkintana on jokin universumin alkio $v^{\mathcal{S}} \in U$.
3. Funktiosymbolin $f \in \mathcal{F}_n$ tulkintana on jokin funktio $f^{\mathcal{S}}\colon U^n \rightarrow U$.
4. Predikaattisymbolin $P \in \mathcal{P}_n$ tulkintana on jokin relaatio $P^{\mathcal{S}} \subseteq U^n$.

Esimerkki 10.2



$U = \{he, tu, ha, be, lo\}$ helsinki$^{\mathcal{S}} = he$ tukholma$^{\mathcal{S}} = tu$

hampuri$^{\mathcal{S}} = ha$ berliini$^{\mathcal{S}} = be$ lontoo$^{\mathcal{S}} = lo$

Kapitaali$^{\mathcal{S}} = \{he, tu, be, lo\} \subseteq U^1 = U$ ja

Lento$^{\mathcal{S}} = \{\langle he, tu\rangle, \langle tu, lo\rangle, \langle lo, be\rangle, \langle he, ha\rangle, \langle ha, be\rangle\} \subseteq U^2$.

6. TOTUUSMÄÄRITELMÄ

- Kielen $\mathcal{L}$ syntaktiset rakenteet tulkitaan kolmella eri tasolla: ensin *termit*, sitten *atomikaavat* ja lopuksi *kaavat*.
- Kielen $\mathcal{L}$ termit ovat viittauksia universumin U alkioihin.

Määritelmä 10.5 Olkoon $\mathcal{S}$ struktuuri ja U struktuurin $\mathcal{S}$ universumi.

1. Vakio $c \in \mathcal{C}$ *nimeää* universumin U alkion $c^{\mathcal{S}}$.
2. Muuttuja $v \in \mathcal{V}$ *nimeää* universumin U alkion $v^{\mathcal{S}}$.
3. Jos termit $t_1, \ldots, t_n$ nimeävät universumin U alkiot $t_1^{\mathcal{S}}, \ldots, t_n^{\mathcal{S}}$ ja $f \in \mathcal{F}_n$, niin termi $f(t_1, \ldots, t_n)$ *nimeää* universumin U alkion $f^{\mathcal{S}}(t_1^{\mathcal{S}}, \ldots, t_n^{\mathcal{S}})$.

Atomikaavojen totuusarvot

- Merkintä $\mathcal{S} \models \phi$ (vastaavasti $\mathcal{S} \not\models \phi$) tarkoittaa, että kaava $\phi \in \mathcal{L}$ on *tosi* (vastaavasti *epätosi*) struktuurissa $\mathcal{S}$.

Määritelmä 10.7 Olkoon $\mathcal{S}$ struktuuri ja U struktuurin $\mathcal{S}$ universumi, $n > 0$ ja $t_0, t_1, \ldots, t_n$ mitä tahansa termejä.

1. $\mathcal{S} \models t_0 = t_1 \iff t_0^{\mathcal{S}} = t_1^{\mathcal{S}}$,
2. $\mathcal{S} \models P \iff \langle\rangle \in P^{\mathcal{S}}$, missä $P \in \mathcal{P}_0$, ja
3. $\mathcal{S} \models P(t_1, \ldots, t_n) \iff \langle t_1, \ldots, t_n\rangle^{\mathcal{S}} = \langle t_1^{\mathcal{S}}, \ldots, t_n^{\mathcal{S}}\rangle \in P^{\mathcal{S}}$, missä $P \in \mathcal{P}_n$.

Kaavojen totuusarvot

Määritelmä 10.9 Olkoon $\mathcal{S}$ struktuuri ja U struktuurin $\mathcal{S}$ universumi. Kaikille kaavoille $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ ja kaikille muuttujille $v \in \mathcal{V}$:

1. $\mathcal{S} \models \neg\alpha \iff \mathcal{S} \not\models \alpha$.
2. $\mathcal{S} \models \alpha \wedge \beta \iff \mathcal{S} \models \alpha$ ja $\mathcal{S} \models \beta$.
3. $\mathcal{S} \models \alpha \vee \beta \iff \mathcal{S} \models \alpha$ tai $\mathcal{S} \models \beta$.
4. $\mathcal{S} \models \alpha \rightarrow \beta \iff \mathcal{S} \not\models \alpha$ tai $\mathcal{S} \models \beta$.
5. $\mathcal{S} \models \alpha \leftrightarrow \beta \iff$ joko $\mathcal{S} \models \alpha$ ja $\mathcal{S} \models \beta$, tai $\mathcal{S} \not\models \alpha$ ja $\mathcal{S} \not\models \beta$.
6. $\mathcal{S} \models \exists v \alpha(v) \iff \mathcal{S}[v \mapsto a] \models \alpha(v)$ *jollekin* alkiolle $a \in U$.
7. $\mathcal{S} \models \forall v \alpha(v) \iff \mathcal{S}[v \mapsto a] \models \alpha(v)$ *kaikille* alkioille $a \in U$.

Totuusmääritelmän seurauksia

- Jos $\mathcal{S}$ on struktuuri, niin kaikille *kaavoille* $\phi \in \mathcal{L}$ pätee

  joko $\mathcal{S} \models \phi$ tai $\mathcal{S} \not\models \phi$.
- *Lauseen* $\phi \in \mathcal{L}$ totuusarvo ei riipu muuttujien tulkinnoista.
- Tyypillisesti predikaattilogiikan kuvauksissa käytetään lauseita.
- Jos $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ on kaava, jossa muuttujat $v_1, \ldots, v_n$ esiintyvät vapaina, se voidaan tulkita relaatioksi $\phi(v_1, \ldots, v_n)^{\mathcal{S}} =$

  $$\{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in U^n \mid \mathcal{S}[v_1 \mapsto a_1, \ldots, v_n \mapsto a_n] \models \phi(v_1, \ldots, v_n)\}.$$

Esimerkki Kaavan Lento(helsinki,x), jossa x on vapaa, tulkinnaksi saadaan $\{tu, ha\}$ kuvan 10.1 mukaisessa asiaintilassa.

Esimerkki

Opisk

3310D	taina
4820H	otso
9055Z	elsi
4358E	uljas
...	...

KoOhj

4358E	tieto
3310D	sähkö
9055Z	kemia
4820H	rakennus
...	...

Kyselyn $\exists x(\mathrm{Opisk}(x, \mathrm{elsi}) \land \mathrm{KoOhj}(x, \mathrm{kemia}))$ totuusarvo on tosi, koska

$$\mathcal{S}[x \mapsto 9055\mathrm{Z}] \models \mathrm{Opisk}(x, \mathrm{elsi}) \land \mathrm{KoOhj}(x, \mathrm{kemia}).$$

TAVOITTEET

- Osaat tulkita predikaattilogiikan kaavoja luonnolliselle kielelle, kun symbolien merkitykset on annettu.
- Osaat laatia yksinkertaisia määritelmiä predikaattilogiikan lauseilla (symbolien valinta ja korrektin syntaksin noudattaminen).
- Osaat muodostaa struktuureja asiantilojen kuvauksina.
- Osaat laskea mielivaltaisen lauseen totuusarvon, kun kielen symbolien tulkinnat (struktuuri) on annettu.

PÄIVÄN PÄHKINÄ

Olkoon annettuna n-alkioinen universumi U ja m-paikkainen predikaattisymboli $P \in \mathcal{P}_m$.

- Kuinka monta erilaista tulkintaa symbolille P voidaan antaa?
- Kirjoita predikaatille P jokaista mahdollista tulkintaa vastaava määritelmä tapauksessa $n = 1$ ja $m = 2$.