Luento 8: Peruskäsitteet ja normaalimuodot

1. Semanttiset peruskäsitteet
2. Peruskäsitteiden väliset yhteydet
3. Prenex-normaalimuoto
4. Konjunktiivinen normaalimuoto
5. Eksistenssikvanttorien eliminointi
6. Klausuulimuoto

1. SEMANTTISET PERUSKÄSITTEET

- Verrattuna lauselogiikan tapaukseen semanttisten peruskäsitteiden määritelmät säilyvät muodoltaan samanlaisina.
- Olennaisena erona on, että loogisten lausekkeiden rakenne on monimutkaisempi ja että struktuurit korvaavat totuusjakelut.

Määritelmä 10.13 Struktuuri $\mathcal{S}$ on lauseen $\phi \in \mathcal{L}$ *malli*, jos ja vain jos $\mathcal{S} \models \phi$ (eli lause ϕ on tosi struktuurissa $\mathcal{S}$).

Määritelmä 10.14 Struktuuri $\mathcal{S}$ on lausejoukon $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ *malli* (merkitään $\mathcal{S} \models \Sigma$), jos ja vain jos $\mathcal{S} \models \phi$ kaikille lauseille $\phi \in \Sigma$.

Toteutuvuus

Määritelmä 10.15 Lause $\phi \in \mathcal{L}$ (tai lausejoukko $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$) on *toteutuva*, jos ja vain jos ainakin yksi struktuuri $\mathcal{S}$ on sen malli.

Esimerkki 10.16 Osoitetaan lause $\exists x \forall y P(x,y)$ toteutuvaksi antamalla sille malli. Olkoon struktuurin $\mathcal{S}$ universumi $U = \{1,2\}$ ja predikaatin P tulkinta $P^{\mathcal{S}} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle\}$. Tällöin:

1. $\langle 1,1\rangle \in P^{\mathcal{S}} \implies \langle x,y\rangle^{\mathcal{S}[x\mapsto 1, y\mapsto 1]} \in P^{\mathcal{S}[x\mapsto 1,y\mapsto 1]}$
   $\implies \mathcal{S}[x\mapsto 1, y\mapsto 1] \models P(x,y)$.
2. $\langle 1,2\rangle \in P^{\mathcal{S}} \implies \langle x,y\rangle^{\mathcal{S}[x\mapsto 1, y\mapsto 2]} \in P^{\mathcal{S}[x\mapsto 1,y\mapsto 2]}$
   $\implies \mathcal{S}[x\mapsto 1, y\mapsto 2] \models P(x,y)$.

Siis $\mathcal{S}[x\mapsto 1] \models \forall y P(x,y)$ ja $\mathcal{S} \models \exists x \forall y P(x,y)$. ■

Pätevyys

Määritelmä 10.17 Lause $\phi \in \mathcal{L}$ on *pätevä* (merkitään $\models \phi$), jos ja vain jos $\mathcal{S} \models \phi$ kaikille kielen $\mathcal{L}$ struktuureille $\mathcal{S}$.

Esimerkki 10.19 Osoitetaan $\models \exists x P(x) \leftrightarrow \neg\forall x \neg P(x)$.

Kaikille kielen $\mathcal{L}$ struktuureille $\mathcal{S}$ ja vastaaville universumeille U pätee:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{S} \models \exists x P(x) \\
\iff\ & \text{jollekin } a \in U \text{ pätee } \mathcal{S}[x\mapsto a] \models P(x) \\
\iff\ & \text{ei ole niin, että kaikille } a \in U \text{ pätee } \mathcal{S}[x\mapsto a] \not\models P(x) \\
\iff\ & \text{ei ole niin, että kaikille } a \in U \text{ pätee } \mathcal{S}[x\mapsto a] \models \neg P(x) \\
\iff\ & \mathcal{S} \not\models \forall x \neg P(x) \\
\iff\ & \mathcal{S} \models \neg\forall x \neg P(x).
\end{aligned}$$

Siis $\mathcal{S} \models \exists x P(x) \leftrightarrow \neg\forall x \neg P(x)$ riippumatta struktuurista $\mathcal{S}$. ■

Looginen seuraavuus

Määritelmä 10.20 Lause $\phi \in \mathcal{L}$ on lausejoukon $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ *looginen seuraus* (merkitään $\Sigma \models \phi$), jos ja vain jos $\mathcal{S} \models \phi$ kaikille $\mathcal{S} \models \Sigma$.

Esimerkki 10.21 Osoitetaan $\{\forall x P(x)\} \models \exists x P(x)$. Tarkastellaan mitä tahansa kielen $\mathcal{L}$ struktuuria $\mathcal{S}$, jolle $\mathcal{S} \models \forall x P(x)$. Tällöin:

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathcal{S} \models \forall x P(x) \\
\Longrightarrow & \text{kaikille } a \in U \text{ pätee } \mathcal{S}[x \mapsto a] \models P(x) \\
\Longrightarrow & \text{jollekin } a \in U \text{ pätee } \mathcal{S}[x \mapsto a] \models P(x) \quad [U \neq \emptyset] \\
\Longrightarrow & \mathcal{S} \models \exists x P(x).
\end{array}
$$

Siis $\{\forall x P(x)\} \models \exists x P(x)$. ■

Vastamallit

Olkoon $\phi \in \mathcal{L}$ mikä tahansa lause ja $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ mikä tahansa lausejoukko.

- Jos $\not\models \phi$, niin vastamalli on struktuuri $\mathcal{S}$ siten, että $\mathcal{S} \not\models \phi$.
- Jos $\Sigma \not\models \phi$, niin vastamalli on malli $\mathcal{S} \models \Sigma$ siten, että $\mathcal{S} \not\models \phi$.

Esimerkki 10.23 Luokitellaan viikonpäiviä seuraavalla lausejoukolla:

$$
\Sigma = \left\{
\begin{array}{l}
\text{tentti}(\text{tiistai}), \\
\text{tentti}(\text{keskiviikko}), \\
\text{luento}(\text{keskiviikko}), \\
\forall x(\neg \text{tentti}(x) \land \neg \text{luento}(x) \rightarrow \text{vapaa}(x))
\end{array}
\right\}.
$$

Onko $\Sigma \models \text{vapaa}(\text{perjantai})$? *Ei*, koska löytyy *vastamalli* $\mathcal{S}$, jonka perusteella $\Sigma \not\models \text{vapaa}(\text{perjantai})$ eli $\mathcal{S} \models \Sigma$ ja $\mathcal{S} \not\models \text{vapaa}(\text{perjantai})$!

2. PERUSKÄSITTEIDEN VÄLISET YHTEYDET

- Lauselogiikan tapauksessa esitettiin joukko loogisten päättelytehtävien välisiä muunnoksia.
- Näitä voidaan hyödyntää myös predikaattilogiikan tapauksessa.

Väite 10.27 Olkoon ϕ ja ψ kielen $\mathcal{L}$ lauseita ja $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ lausejoukko.

1. $\phi \equiv \psi \iff \models \phi \leftrightarrow \psi$.
2. $\models \phi \iff \emptyset \models \phi$.
3. $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \models \phi \iff \models \phi_1 \land \ldots \land \phi_n \rightarrow \phi$.
4. $\Sigma \models \phi \iff \Sigma \cup \{\neg\phi\}$ on toteutumaton.
5. $\models \phi \iff \neg\phi$ on toteutumaton.

3. PRENEX-NORMAALIMUOTO

- Predikaattilogiikan lause $\phi \in \mathcal{L}$ on *prenex*-normaalimuodossa, mikäli se on syntaktiselta rakenteeltaan muotoa
$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n \psi,$$
missä jokainen Q_i on kvanttori ja *alikaava* ψ ei sisällä kvanttoreita.

Esimerkki 11.1 Seuraavat *lauseet* ovat prenex-normaalimuodossa:

$$
\begin{array}{l}
P(a) \\
\forall x \exists y Q(x,y) \\
\forall x \exists y \forall z \forall w (P(x) \rightarrow (Q(y,z) \rightarrow R(z,w,x)))
\end{array}
$$

Väite 11.4 Jokaiselle predikaattilogiikan lauseelle $\phi \in \mathcal{L}$ on olemassa prenex-normaalimuodossa oleva lause $\psi \in \mathcal{L}$ siten, että $\psi \equiv \phi$.

Lauseiden muuttaminen prenex-normaalimuotoon

Menettely on seuraava mille tahansa predikaattilogiikan lauseelle:

1. Poistetaan ekvivalenssit: $\exists x P(x) \leftrightarrow \neg\forall x \neg P(x)$
   $\rightsquigarrow \quad (\exists x P(x) \rightarrow \neg\forall x \neg P(x)) \wedge (\neg\forall x \neg P(x) \rightarrow \exists x P(x))$.
2. Poistetaan implikaatiot:
   $\exists x P(x) \rightarrow \neg\forall x \neg P(x) \quad \rightsquigarrow \quad \neg\exists x P(x) \vee \neg\forall x \neg P(x)$.
3. Siirretään negaatiot atomisten kaavojen eteen:
   $\neg\exists x P(x) \vee \neg\forall x \neg P(x) \quad \rightsquigarrow \quad \forall x \neg P(x) \vee \exists x \neg\neg P(x) \quad \rightsquigarrow$
   $\forall x \neg P(x) \vee \exists x P(x)$.
4. Tuodaan kvanttorit ulos kaavarakenteesta: $\forall x \neg P(x) \vee \exists x P(x)$
   $\rightsquigarrow \quad \exists x(\forall x \neg P(x) \vee P(x)) \quad \rightsquigarrow \quad \exists x \forall y(\neg P(y) \vee P(x))$.

Kvanttoreihin liittyvät muunnokset

$$
\begin{aligned}
\neg\forall y\psi &\rightsquigarrow \exists y\neg\psi && (11.2)\\
\neg\exists y\psi &\rightsquigarrow \forall y\neg\psi && (11.3)\\
\forall y\varphi(y) \vee \psi &\rightsquigarrow \forall z(\varphi(z) \vee \psi) && (11.4)\\
\psi \vee \forall y\varphi(y) &\rightsquigarrow \forall z(\psi \vee \varphi(z)) && (11.5)\\
\forall y\varphi(y) \wedge \psi &\rightsquigarrow \forall z(\varphi(z) \wedge \psi) && (11.6)\\
\psi \wedge \forall y\varphi(y) &\rightsquigarrow \forall z(\psi \wedge \varphi(z)) && (11.7)\\
\exists y\varphi(y) \vee \psi &\rightsquigarrow \exists z(\varphi(z) \vee \psi) && (11.8)\\
\psi \vee \exists y\varphi(y) &\rightsquigarrow \exists z(\psi \vee \varphi(z)) && (11.9)\\
\exists y\varphi(y) \wedge \psi &\rightsquigarrow \exists z(\varphi(z) \wedge \psi) && (11.10)\\
\psi \wedge \exists y\varphi(y) &\rightsquigarrow \exists z(\psi \wedge \varphi(z)) && (11.11)
\end{aligned}
$$

Muunnoksissa (11.4)–(11.11) y korvataan uudella muuttujalla z, mikäli y esiintyy vapaana alikaavassa ψ. Muussa tapauksessa z voi olla y!

Esimerkki 11.3

$$
\begin{aligned}
&\forall x(P(x) \rightarrow \exists z R(z,x)) \rightarrow \exists x Q(x)\\
\rightsquigarrow\quad & \neg\forall x(P(x) \rightarrow \exists z R(z,x)) \vee \exists x Q(x)\\
\rightsquigarrow\quad & \neg\forall x(\neg P(x) \vee \exists z R(z,x)) \vee \exists x Q(x)\\
\rightsquigarrow\quad & \exists x\neg(\neg P(x) \vee \exists z R(z,x)) \vee \exists x Q(x)\\
\rightsquigarrow\quad & \exists x(\neg\neg P(x) \wedge \neg\exists z R(z,x)) \vee \exists x Q(x)\\
\rightsquigarrow\quad & \exists x(P(x) \wedge \neg\exists z R(z,x)) \vee \exists x Q(x)\\
\rightsquigarrow\quad & \exists x(P(x) \wedge \forall z\neg R(z,x)) \vee \exists x Q(x)\\
\rightsquigarrow\quad & \exists x(\exists x(P(x) \wedge \forall z\neg R(z,x)) \vee Q(x))\\
\rightsquigarrow\quad & \exists x\exists y((P(y) \wedge \forall z\neg R(z,y)) \vee Q(x))\\
\rightsquigarrow\quad & \exists x\exists y(\forall z(P(y) \wedge \neg R(z,y)) \vee Q(x))\\
\rightsquigarrow\quad & \exists x\exists y\forall z((P(y) \wedge \neg R(z,y)) \vee Q(x)).
\end{aligned}
$$

4. KONJUNKTIIVINEN NORMAALIMUOTO

Predikaattilogiikan tapauksessa *Literaalit* ovat joko

1. atomikaavoja $P(\vec{t})$ (eli *positiivisia literaaleja*) tai
2. atomikaavojen negaatioita $\neg P(\vec{t})$ (eli *negatiivisia literaaleja*),

missä $\vec{t}$ tarkoittaa termien $t_1,\ldots,t_n$ sekvenssiä ja $P \in \mathcal{P}_n$.

Määritelmä 11.5 Lause $\alpha \in \mathcal{L}$ on konjunktiivisessa normaalimuodossa, jos ja vain jos α on prenex-normaalimuodossa $Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_nx_n\phi(x_1,\ldots,x_n)$, missä kvanttoreita sisältämätön osa $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ on konjunktio $\phi_1 \wedge\cdots\wedge \phi_n$ ja jokainen ϕ_i on literaalien disjunktio $l_1 \vee \ldots \vee l_{m_i}$.

Esimerkki 11.6 Seuraava lause on KNMssa:

$$\forall x\exists y\forall z((\neg P(x,y) \vee Q(y,x)) \wedge R(z) \wedge (\neg R(x) \vee P(y,z) \vee Q(x,z))).$$

Konjunktiivisen normaalimuodon hakeminen

➤ Tarvittaessa prenex-normaalimuodon kvanttoreita sisältämätön osa voidaan järjestää konjunktiiviseen normaalimuotoon seuraavasti:

$$\varphi \lor (\phi \land \psi) \rightsquigarrow (\varphi \lor \phi) \land (\varphi \lor \psi)$$
$$(\phi \land \psi) \lor \varphi \rightsquigarrow (\phi \lor \varphi) \land (\psi \lor \varphi)$$

➤ Jokaiselle predikaattilogiikan lauseelle on olemassa KNM.

Esimerkki 11.8 Muunnetaan edellä johdettu prenex-normaalimuoto edelleen konjunktiiviseen normaalimuotoon:

$$\exists x \exists y \forall z ((P(y) \land \neg R(z,y)) \lor Q(x))$$
$$\rightsquigarrow \exists x \exists y \forall z ((P(y) \lor Q(x)) \land (\neg R(z,y) \lor Q(x))).$$

5. EKSISTENSSIKVANTTORIEN ELIMINOINTI

➤ Tarkastellaan kahta kokonaislukuja koskevaa väittämää:

$$\exists x \forall y (x+y=y) \rightsquigarrow \forall y (0+y=y)$$
$$\forall x \exists y (x+y=0) \rightsquigarrow \forall x (x+-(x)=0)$$

➤ Menettely voidaan yleistää prenex-normaalimuodossa $\vec{Q}x\phi$ olevan kaavan ensimmäisen eksistenssikvanttorin $\exists x$ poistamiseen:

1. Jos kvanttori $\exists x$ on sekvenssin $\vec{Q}x$ ensimmäinen, poistetaan $\exists x$ sekvenssistä ja korvataan näin syntyvät muuttujan x vapaat esiintymät jollain uudella vakiolla c.
2. Jos kvanttoria $\exists x$ esiintyy sekvenssissä $\vec{Q}x$ universaalikvanttorien $\forall y_1 \cdots \forall y_n$ jälkeen, poistetaan kvanttori $\exists x$ ja korvataan näin syntyvät muuttujan x vapaat esiintymät termillä $f(y_1,\ldots,y_n)$, missä f on uusi funktiosymboli.

Skolemointi

➤ Eksistenssikvanttorien eliminointia kutsutaan myös *skolemoinniksi*.

➤ Menettelyssä valittavia uusia vakio- ja funktiosymboleita kutsutaan *Skolem-vakioiksi ja -funktioiksi*.

Esimerkki 11.10 Suoritetaan skolemointi seuraaville lauseille:

$$\exists x P(x) \rightsquigarrow P(c).$$
$$\exists x \forall y \exists x P(x,y) \rightsquigarrow \forall y P(f(y),y).$$
$$\forall x \exists y (P(x,y) \land Q(y,x)) \rightsquigarrow \forall x (P(x,f(x)) \land Q(f(x),x)).$$
$$\forall x \exists y \forall z \exists w P(w,z,y,x) \rightsquigarrow \forall x \forall z P(g(x,z),z,f(x),x).$$
$$\exists x \exists y \forall z P(x,y,z,x) \rightsquigarrow \forall z P(c_1,c_2,z,c_1).$$
$$\forall x \exists y \exists z P(x,y,z) \rightsquigarrow \forall x P(x,f_1(x),f_2(x)).$$

Skolemoinnin loogiset ominaisuudet

➤ Prenex-normaalimuodossa olevan lauseen φ skolemoitu muoto φ' **ei välttämättä ole** loogisesti ekvivalentti lauseen φ kanssa.

Esimerkki 11.12 Lause $\exists x P(x)$ ja sen skolemoitu muoto $P(c)$.

1. Nyt $\models P(c) \rightarrow \exists x P(x)$, mutta $\not\models \exists x P(x) \rightarrow P(c)$.
2. *Vastamalli* $\mathcal{S}$: universumi $U = \{1,2\}$, $c^{\mathcal{S}} = 1$ ja $P^{\mathcal{S}} = \{2\}$.
   Nyt $\mathcal{S} \models \exists x P(x)$, mutta $\mathcal{S} \not\models P(c)$.

Teoreema 11.11 Olkoon φ Prenex-normaalimuodossa oleva predikaattilogiikan lause ja φ' sen skolemoitu muoto. Tällöin

$$\varphi \text{ on on toteutuva} \iff \varphi' \text{ on toteutuva.}$$

6. KLAUSUULIMUOTO

Mille tahansa lauseelle voidaan hakea klausuulimuoto seuraavasti:

1. Haetaan prenex-normaalimuoto.
2. Muunnetaan tämä konjunktiiviseen normaalimuotoon.
3. Tarvittaessa poistetaan eksistenssikvanttorit skolemoimalla.
4. Kirjoitetaan klausuuliesitys (joukko literaalien joukkoja).

Esimerkki 11.13 Lauseen $\forall x(\neg(P(x) \to \forall y Q(x,y)) \lor R(x))$ tapaus:

$\rightsquigarrow \quad \forall x \exists z((P(x) \land \neg Q(x,z)) \lor R(x))$

$\rightsquigarrow \quad \forall x \exists z((P(x) \lor R(x)) \land (\neg Q(x,z) \lor R(x)))$

$\rightsquigarrow \quad \forall x((P(x) \lor R(x)) \land (\neg Q(x,f(x)) \lor R(x)))$

$\rightsquigarrow \quad \{\{P(x),R(x)\},\{\neg Q(x,f(x)),R(x)\}\}.$

Muutama vinkki

- Jos lause on muodoltaan *konjunktio* $\phi_1 \land \ldots \land \phi_n$, on mahdollista saattaa konjunktion jäsenet $\phi_1,\ldots,\phi_n$ klausuulimuotoon *erikseen*.
- Muista myös, että $\neg(\phi_1 \land \cdots \land \phi_n \to \phi) \equiv \phi_1 \land \cdots \land \phi_n \land \neg\phi$.
- Existenssikvanttorit kannattaa tuoda ulos lauserakenteesta ennen universaalikvanttoreita (mikäli mahdollista).

Esimerkki 11.14 Konjunktion $\forall x P(x) \land \exists x Q(x)$ jäsenille saadaan klausuuliesitykset $\{\{P(x)\}\}$ ja $\{\{Q(c)\}\}$ ja näin ollen koko lauseen klausuuliesitykseksi näiden unioni $\{\{P(x)\},\{Q(c)\}\}$.

Esimerkki 11.15 Siis $\forall x P(x) \lor \exists x Q(x)$ kirjoitetaan muotoon $\exists x \forall y(P(y) \lor Q(x))$ eikä muotoon $\forall x \exists y(P(x) \lor Q(y))$.

TAVOITTEET

- Olet kerrannut semanttisten peruskäsitteiden *toteutuvuuden*, *pätevyyden*, *loogisen seuraavuuden* ja *ekvivalenssin* määritelmät sekä ymmärrät niiden väliset kytkennät.
- Osaat hakea mille tahansa predikaattilogiikan lauseelle
  1. prenex-normaalimuodon,
  2. konjunktiivisen normaalimuodon ja
  3. klausuulimuodon.
- Tiedät, ettei skolemointi säilytä loogista ekvivalenssia ja mitä rajoituksia siitä seuraa ajatellen klausuulimuodon käyttöä.

PÄIVÄN PÄHKINÄ

Tutki eksistenssikvanttorien eliminoinnin vaikutusta muunnoksen kohteena olevan prenex-normaalimuodon pituuteen.

- Hae esimerkkejä prenex-normaalimuodossa olevista lauseista, joiden pituutta skolemointi kasvattaa voimakkaasti.