Luento 10: Tietämyksen esittäminen

1. Yleiset tavoitteet
2. Ohjeita predikaattien määrittelyyn
3. Yksikäsitteiset ja kattavat nimet
4. Määritelmien tarkkuudesta

1. YLEISET TAVOITTEET

- Valitaan sopiva predikaattilogiikan kieli $\mathcal{L}$ (joukot $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{P}$).
- Määritellään mahdolliset *asiantilat* (ja predikaattien tulkinnat) kirjoittamalla predikaattilogiikan *lausejoukko*/*teoria* $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$.
- Lausejoukon Σ mallit määräävät *loogisten seurausten* joukon
$$\mathrm{Cn}(\Sigma) = \{\phi \in \mathcal{L} \mid \phi \text{ on lause ja } \Sigma \models \phi\},$$
joka muodostaa lausejoukon Σ loogisen *sulkeuman*.
- Lausejoukon Σ lauseet muodostavat *eksplisiittisen tietämyksen*.
- Joukon $\mathrm{Cn}(\Sigma) \setminus \Sigma$ lauseet ovat pääteltävissä eksplisiittisestä tietämyksestä ja siten *implisiittistä tietämystä*.

Esimerkki (13.1)

Radioverkko koostuu joukosta tukiasemia ja niiden välisistä linkeistä.

- Kuvataan tukiasemien välisiä yhteyksiä seuraavalla lausejoukolla Σ:
$$\begin{aligned}\{\ &\text{Linkki}(a,b),\ \text{Linkki}(b,c),\ \text{Linkki}(d,e),\\ &\forall x\ \text{Yhteys}(x,x),\\ &\forall x \forall y(\text{Linkki}(x,y) \rightarrow \text{Yhteys}(x,y)),\\ &\forall x \forall y(\text{Yhteys}(x,y) \rightarrow \text{Yhteys}(y,x)),\\ &\forall x \forall y \forall z(\text{Yhteys}(x,y) \land \text{Yhteys}(y,z) \rightarrow \text{Yhteys}(x,z))\ \}.\end{aligned}$$
- Lause $\text{Linkki}(a,b) \in \Sigma$ on eksplisiittistä (ylöskirjattua) tietämystä.
- Lause $\text{Yhteys}(c,a) \in \mathrm{Cn}(\Sigma) \setminus \Sigma$ on implisiittistä tietämystä. ■

Esimerkki (13.2)

Lause $\text{Yhteys}(a,e)$ ei seuraa radioverkkoesimerkin lausejoukosta Σ.

- Vastamalli $\mathcal{S}$ perustuu universumiin $U = \{1,2,3,4,5\}$:
Vakioiden tulkinnat: $a^{\mathcal{S}} = 1$, $b^{\mathcal{S}} = 2$, $c^{\mathcal{S}} = 3$, $d^{\mathcal{S}} = 4$ ja $e^{\mathcal{S}} = 5$.
Predikaattien tulkinnat:
— $\text{Linkki}^{\mathcal{S}} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 4,5\rangle\}$ ja
— $\text{Yhteys}^{\mathcal{S}} = \left\{\begin{array}{l}\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle,\\ \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 5,4\rangle, \langle 5,5\rangle\end{array}\right\}.$
- Lisättäessä esim. lause $\text{Linkki}(d,c)$ saadaan lausejoukko $\Sigma' = \Sigma \cup \{\text{Linkki}(d,c)\}$, jolle $\Sigma' \models \text{Yhteys}(a,e)$.
- Em. vastamalli $\mathcal{S}$ karsiutuu pois, koska $\mathcal{S} \not\models \text{Linkki}(d,c)$.

2. OHJEITA PREDIKAATTIEN MÄÄRITTELYYN

- Tavoitteena on kirjoittaa predikaatille P ja sen tulkintana olevalle relaatiolle määritelmä joidenkin muiden predikaattien avulla.
- Mielivaltainen predikaattilogiikan kaava ϕ saadaan muotoon
$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n \psi,$$
missä $\psi = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_m$ ja kukin ψ_i on literaalien disjunktio
$$\begin{aligned} & \neg Q_1(\vec{t_1}) \vee \cdots \vee \neg Q_k(\vec{t_k}) \vee P_1(\vec{s_1}) \vee \cdots \vee P_l(\vec{s_l}) \\ \equiv \quad & Q_1(\vec{t_1}) \wedge \cdots \wedge Q_k(\vec{t_k}) \rightarrow P_1(\vec{s_1}) \vee \cdots \vee P_l(\vec{s_l}). \end{aligned}$$
- Jatkossa pyritään kirjoittamaan määritelmiä ensisijaisesti muotoon
$$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n (Q_1(\vec{t_1}) \wedge \cdots \wedge Q_k(\vec{t_k}) \rightarrow P(\vec{t})).$$
- Millä ehdoilla $Q_1(\vec{t_1}), \ldots, Q_k(\vec{t_k})$ voidaan päätellä $P(\vec{t})$?

Esimerkki (13.3)

Olkoon annettuna seuraavat predikaatit:

1. Sairastaa(x) = "henkilö x on sairas" ja
2. Tapaa(x,y) = "henkilö x on tavannut henkilön y".

Tarkoituksena on määritellä näiden avulla predikaatti

Tartuntavaarassa(x) = "henkilö x on tartuntavaarassa".

- Millä ehdoilla jonkin henkilö x on tartuntavaarassa?
$$\forall x \forall y (\text{Tapaa}(x,y) \wedge \text{Sairastaa}(y) \rightarrow \text{Tartuntavaarassa}(x))$$
$$\forall x \forall y (\text{Tapaa}(x,y) \wedge \text{Tartuntavaarassa}(y) \rightarrow \text{Tartuntavaarassa}(x))$$
- Tämä on Tartuntavaarassa-predikaatin rekursiivinen määritelmä.

Tyypitetyt kvanttorit

- Edellä käsiteltiin universumia, jossa oli ainoastaan henkilöitä.
- Tyypillisesti asetelma on monimutkaisempi ja universumi koostuu useampaa eri tyyppiä olevista alkioista.
- Tällöin syntyy tarve rajata kvantifiointia koskemaan ainoastaan tiettyä tyyppiä T olevia alkioita seuraavaan tapaan:
$$\forall x \in T : \phi(x) \text{ ja } \exists x \in T : \phi(x).$$
- Tyyppi T voidaan esittää yksipaikkaisen predikaatin avulla:
$$T(x) = \text{"alkio } x \text{ on tyyppiä } T\text{"}.$$
- Tyypitetyt kvanttorit ilmaistaan predikaattilogiikassa seuraavasti:
$$\forall x (T(x) \rightarrow \phi(x)) \text{ ja } \exists x (T(x) \wedge \phi(x)).$$

Esimerkki

Lisätään tartuntavaaraesimerkkiin tyyppipredikaatit Henkilö(x) = "x on henkilö" ja Tauti(x) = "x on tauti".

- Määritellään predikaatit ilman tyyppi-informaatiota:
  - Tapaa(x,y) = "x tapaa y:n",
  - Sairastaa(x,y) = "x sairastaa y:tä" ja
  - Tartuntavaarassa(x,y) = "x on vaarassa sairastua y:hyn".
- Lauseet saadaan nyt seuraavaan muotoon:
$$\forall x \forall y \forall z (\text{Henkilö}(x) \wedge \text{Henkilö}(y) \wedge \text{Tapaa}(x,y) \wedge \text{Tauti}(z) \wedge \text{Sairastaa}(y,z) \rightarrow \text{Tartuntavaarassa}(x,z))$$
$$\forall x \forall y \forall z (\text{Henkilö}(x) \wedge \text{Henkilö}(y) \wedge \text{Tapaa}(x,y) \wedge \text{Tauti}(z) \wedge \text{Tartuntavaarassa}(y,z) \rightarrow \text{Tartuntavaarassa}(x,z))$$

Monimutkaisempia määritelmiä

- Muotoa $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n (Q_1(\vec{t_1}) \wedge \cdots \wedge Q_k(\vec{t_k}) \rightarrow P(\vec{t}))$ olevien määritelmien *ilmaisuvoima* ei ole aina riittävä.
- Joissain tilanteissa tarvitaan *eksistentiaalista kvantifiointia*:

$$\begin{aligned} & \forall x(\mathsf{Solmu}(x) \rightarrow \exists y(\mathsf{V\ddot{a}ri}(y) \wedge \mathsf{V\ddot{a}ritetty}(x,y))) \\ \equiv\ & \forall x \exists y(\mathsf{Solmu}(x) \rightarrow \mathsf{V\ddot{a}ri}(y) \wedge \mathsf{V\ddot{a}ritetty}(x,y)). \end{aligned}$$

- Implikaation seurauksena voi olla myös *atomien disjunktio* $P_1(\vec{s_1}) \vee \cdots \vee P_l(\vec{s_l})$ pelkän atomin $P(\vec{t})$ sijaan:

$$\forall x(\mathsf{Venttiili}(x) \rightarrow \mathsf{Auki}(x) \vee \mathsf{Kiinni}(x)).$$

$$\forall x(\mathsf{Venttiili}(x) \wedge \mathsf{Auki}(x) \wedge \mathsf{Kiinni}(x) \rightarrow \bot).$$

- Näissä esimerkeissä on keskeistä vaihtoehtoisuuden ilmaiseminen.

3. YKSIKÄSITTEISET JA KATTAVAT NIMET

- Rajoitutaan jatkossa predikaattilogiikan kieliin $\mathcal{L}$, joissa ei ole funktiosymboleita ja ainoastaan äärellinen määrä vakiosymboleita.
- Predikaattilogiikassa struktuurin $\mathcal{S}$ määritelmä ja tapa jolla vakiosymbolit tulkitaan $\mathcal{S}$:ssa mahdollistavat, että
  1. jokin universumin U alkio $a \in U$ on useamman vakion $c_1, \ldots, c_n$ ($n > 1$) nimeämä: $c_1^{\mathcal{S}} = \ldots = c_n^{\mathcal{S}} = a$.
  2. jokin universumin U alkio $a \in U$ ei ole minkään vakion nimeämä (eli kaikille vakiosymboleille c pätee $c^{\mathcal{S}} \neq a$).
- Tietämyksen esittämisen kannalta tällainen mahdollisuus muodostuu usein jopa turhaksi vapausasteeksi.
- Nimeäminen voidaan pakottaa yksikäsitteiseksi lauseita lisäämällä.

Tarvittavat lauseet

Olkoon kielessä $\mathcal{L}$ vakiosymbolit $c_1, \ldots, c_n$.

- *Nimien yksikäsitteisyyden* ilmaisevat muotoa

$$\neg(c_i = c_j)$$

  olevat lauseet, missä $1 \leq i < j \leq n$.
- Lauseita tarvitaan neliöllinen määrä (yhteensä $\frac{n^2-n}{2}$ kappaletta).
- *Nimien kattavuuden* ilmaisee seuraavaa muotoa oleva lause:

$$\forall x(x = c_1 \vee \cdots \vee x = c_n).$$

- Tarvittavan lauseen pituus riippuu lineaarisesti vakioiden lukumäärästä n.

Esimerkki

Tarkastellaan lausejoukon

$$\Sigma_1 = \{\neg(l = h), \neg(l = e), \neg(h = e)\}$$

malleja $\mathcal{S}_i$, kun universumina U_i on joukko henkilöitä $h_1, h_2, \ldots$.

U_i	$l^{\mathcal{S}_i}$	$h^{\mathcal{S}_i}$	$e^{\mathcal{S}_i}$
$\{h_1,h_2,h_3\}$	h_1	h_2	h_3
$\{h_1,h_2,h_3\}$	h_1	h_3	h_2
$\{h_1,h_2,h_3\}$	h_2	h_1	h_3
$\{h_1,h_2,h_3\}$	h_2	h_3	h_1
$\{h_1,h_2,h_3\}$	h_3	h_1	h_2
$\{h_1,h_2,h_3\}$	h_3	h_2	h_1
$\{h_1,h_2,h_3,h_4\}$	h_1	h_2	h_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\Longrightarrow$ Universumissa oltava vähintään 3 henkilöä. ■

Esimerkki

Tarkastellaan lausejoukon

$$\Sigma_2 = \{\forall x(x = l \lor x = h \lor x = e)\}$$

malleja $\mathcal{S}_i$, kun universumina U_i on joukko henkilöitä $h_1, h_2, \ldots$.

U_i	$l^{\mathcal{S}_i}$	$h^{\mathcal{S}_i}$	$e^{\mathcal{S}_i}$
$\{h_1\}$	h_1	h_1	h_1
$\{h_1,h_2\}$	h_1	h_1	h_2
$\{h_1,h_2\}$	h_1	h_2	h_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\{h_1,h_2,h_3\}$	h_1	h_2	h_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\{h_1,h_2,h_3\}$	h_3	h_2	h_1

$\Longrightarrow$ Universumissa voi olla korkeintaan 3 henkilöä. ■

Esimerkki

Tarkastellaan lausejoukon

$$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{\neg(l = h), \neg(l = e), \neg(h = e), \\ \forall x(x = l \lor x = h \lor x = e)\}$$

malleja $\mathcal{S}_i$, kun universumina U_i on joukko henkilöitä $h_1, h_2, \ldots$.

U_i	$l^{\mathcal{S}_i}$	$h^{\mathcal{S}_i}$	$e^{\mathcal{S}_i}$
$\{h_1,h_2,h_3\}$	h_1	h_2	h_3
$\{h_1,h_2,h_3\}$	h_1	h_3	h_2
$\{h_1,h_2,h_3\}$	h_2	h_1	h_3
$\{h_1,h_2,h_3\}$	h_2	h_3	h_1
$\{h_1,h_2,h_3\}$	h_3	h_1	h_2
$\{h_1,h_2,h_3\}$	h_3	h_2	h_1

$\Longrightarrow$ Universumissa on oltava täsmälleen 3 henkilöä. ■

4. MÄÄRITELMIEN TARKKUUDESTA

- *Herbrand-universumi* H on tarkasteltavan predikaattilogiikan kielen $\mathcal{L}$ muuttujattomien termien joukko.
- Tavoitteena on siis kirjoittaa predikaatin $P \in \mathcal{P}_n$ määrittelevä lausejoukko Σ_P, kun lähtökohtana on tieto predikaatin P tarkoittamasta relaatiosta $P^* \subseteq H^n$.

Määritelmä 13.14 Predikaatin $P \in \mathcal{P}_n$ määrittelevä lausejoukko $\Sigma_P \subseteq \mathcal{L}$ on riittävän tarkka, joss kaikille $t_1 \in H, \ldots, t_n \in H$ pätee:

$$\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^* \iff \Sigma_P \models P(t_1, \ldots, t_n).$$

Esimerkki

Palataan radioverkkoesimerkin lausejoukkoon

$$\begin{aligned}\Sigma = \{\ & \text{Linkki}(a,b),\ \text{Linkki}(b,c),\ \text{Linkki}(d,e),\\ & \forall x\, \text{Yhteys}(x,x),\\ & \forall x \forall y(\text{Linkki}(x,y) \to \text{Yhteys}(x,y)),\\ & \forall x \forall y(\text{Yhteys}(x,y) \to \text{Yhteys}(y,x)),\\ & \forall x \forall y \forall z(\text{Yhteys}(x,y) \land \text{Yhteys}(y,z) \to \text{Yhteys}(x,z))\ \}.\end{aligned}$$

- Linkki-predikaatin määritelmän lähtökohtana on $\text{Linkki}^* = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle d,e\rangle\}$, joita vastaavat lauseet ovat johdettavissa.
- Yhteys-predikaatin määritelmä on riittävän tarkka, koska vain tavoiteltua relaatiota $\text{Yhteys}^* = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle, \langle d,e\rangle, \langle e,d\rangle, \langle e,e\rangle\}$ vastaavat lauseet $\text{Yhteys}(a,a), \ldots$ ovat määritelmän Σ loogisia seurauksia.

Negatiiviset ehdot

➤ Tarkastellaan muotoa

$$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n (Q_1(\vec{t_1}) \land \cdots \land Q_k(\vec{t_k}) \rightarrow P(\vec{t}))$$

olevien määritelmien yleistämistä tapaukseen, missä sallitaan atomien $Q_i(\vec{t_i})$ lisäksi myös negatiivisia literaaleja $\neg Q_i(\vec{t_i})$.

➤ Negatiivinen ehto $\neg Q_i(\vec{t_i})$ voidaan muuntaa positiiviseksi vaihtoehdoksi $Q_i(\vec{t_i})$ seuraukselle $P(\vec{t})$:

$$\begin{aligned} & \forall x(\neg \text{Sairastaa}(x) \land \neg \text{Tartuntavaarassa}(x) \rightarrow \text{Turvassa}(x)) \\ \equiv \quad & \forall x(\text{Sairastaa}(x) \lor \text{Tartuntavaarassa}(x) \lor \text{Turvassa}(x)). \end{aligned}$$

➤ Jotta negatiiviset ehdot tulisivat määritellyiksi, määritelmistä tulisi seurata loogisesti $\neg Q_i(\vec{t_i})$ mikäli $Q_i(\vec{t_i})$ ei ole looginen seuraus.

Määritelmien täydellisyys

➤ Riittävän tarkka määritelmä Σ_P ei ole välttämättä *täydellinen* eli ei ole taattua, että $\Sigma_P \models \neg P(t_1, \ldots, t_n)$ mikäli $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \notin P^*$.

➤ Radioverkkoesimerkissä mm. $\Sigma \not\models \neg \text{Yhteys}(a, e)$.

Määritelmä 13.17 Predikaatin $P \in \mathcal{P}_n$ määrittelevä lausejoukko $\Sigma_P \subseteq \mathcal{L}$ on täydellinen, jos ja vain jos kaikille $t_1 \in H, \ldots, t_n \in H$ pätee:

$$\Sigma_P \models P(t_1, \ldots, t_n) \text{ tai } \Sigma_P \models \neg P(t_1, \ldots, t_n).$$

$\Longrightarrow$ Jos predikaatin $P \in \mathcal{P}_n$ määritelmä Σ_P on täydellinen ja $\Sigma_P \not\models P(t_1, \ldots, t_n)$ joillekin $t_1 \in H, \ldots, t_n \in H$, niin $\Sigma_P \models \neg P(t_1, \ldots, t_n)$.

Esimerkki

Tarkastellaan tartuntavaaraesimerkin muunnelmaa:

$$\begin{aligned} \Sigma = \{ & \forall x \forall y(\text{Tapaa}(x,y) \land \text{Sairastaa}(y) \rightarrow \text{Tartuntavaarassa}(x)), \\ & \forall x(\neg \text{Sairastaa}(x) \land \neg \text{Tartuntavaarassa}(x) \rightarrow \text{Turvassa}(x)), \\ & \text{Tapaa}(l,h),\ \text{Tapaa}(h,l), \\ & \text{Tapaa}(l,e),\ \text{Tapaa}(e,l),\ \text{Sairastaa}(e) \}. \end{aligned}$$

➤ Nyt $\Sigma \models \text{Tartuntavaarassa}(l)$, $\Sigma \not\models \text{Tartuntavaarassa}(h)$ ja $\Sigma \not\models \neg \text{Tartuntavaarassa}(h)$.

➤ Täten Σ ei ole täydellinen Tartuntavaarassa-predikaatin (eikä muidenkaan predikaattien) suhteen.

➤ Jotta näin olisi, määritelmästä tulisi seurata loogisesti $\neg \text{Tartuntavaarassa}(h)$ ja $\neg \text{Tartuntavaarassa}(e)$.

Predikaatin määritelmän täydentäminen

1. Predikaatin $=$ osalta riittää nimien yksikäsitteisyys ja kattavuus:

   $$\neg(l = h),\ \neg(l = e),\ \neg(h = e) \text{ ja } \forall x(x = l \lor x = h \lor x = e).$$

2. Predikaateille $\text{Tapaa}(x,y)$ ja $\text{Sairastaa}(x)$ voidaan kirjoittaa varsin tiiviit esitykset yhtäsuuruuspredikaatin avulla:

   $$\begin{aligned} & \forall x(\text{Sairastaa}(x) \leftrightarrow x = e) \\ & \forall x \forall y(\text{Tapaa}(x,y) \leftrightarrow (x = l \land y = h) \lor (x = h \land y = l) \lor \\ & \qquad (x = l \land y = e) \lor (x = e \land y = l)) \end{aligned}$$

3. Predikaattien $\text{Tartuntavaarassa}(x)$ ja $\text{Turvassa}(x)$ määritelmät voidaan kirjoittaa vastaavasti ekvivalensseiksi:

   $$\begin{aligned} & \forall x(\text{Tartuntavaarassa}(x) \leftrightarrow \exists y(\text{Tapaa}(x,y) \land \text{Sairastaa}(y))) \\ & \forall x(\text{Turvassa}(x) \leftrightarrow \neg \text{Sairastaa}(x) \land \neg \text{Tartuntavaarassa}(x)) \end{aligned}$$

Loogiset seuraavuudet

Tapaa	Sairastaa	Tartuntavaarassa	Turvassa
$\neg$Tapaa(l,l)	$\neg$Sairastaa(l)	Tartuntavaarassa(l)	$\neg$Turvassa(l)
$\neg$Tapaa(h,h)	$\neg$Sairastaa(h)	$\neg$Tartuntavaarassa(h)	Turvassa(h)
$\neg$Tapaa(e,e)	Sairastaa(e)	$\neg$Tartuntavaarassa(e)	$\neg$Turvassa(e)
Tapaa(l,h)			
Tapaa(h,l)			
Tapaa(l,e)			
Tapaa(e,l)			
$\neg$Tapaa(h,e)			
$\neg$Tapaa(e,h)			

TAVOITTEET

- Osaat kirjoittaa annetulle predikaatille *riittävän tarkan* määritelmän, kun lähtökohtana on joukko muita predikaatteja.
- Ymmärrät, mitä määritelmien täydellisyys tarkoittaa ja millä tavalla epätäydellisyys tulee ilmi riittävän tarkan määritelmän tapauksessa.
- Tiedät, että täydellisten määritelmien kirjoittamisesta tulee hankalaa erityisesti rekursiivisten määritelmien tapauksessa.

Täydellisten määritelmien kirjoittamista ei edellytetä tentissä!

PÄIVÄN PÄHKINÄ

Matematiikassa puhutaan *kehämääritelmästä*, jos kaksi asiaa määritellään toinen toisensa avulla. Tällöin määritelmän sisältö jää helposti epäselväksi.

- Mieti, millä tavalla kehämääritelmät tulevat esille, jos määritelmiä kirjoitetaan predikaattilogiikan lauseilla.