

Ratkaisuja demotehtäviin

Tehtävä 14.1

Herbrand-universumi U muodostuu termeistä, jotka voidaan muodostaa klausuulijoukossa esiintyvistä vakio- ja funktiosymboleista. Jos klausuulijoukossa ei ole vakiosymboleita, universumiin otetaan jokin vakiosymboli, esimerkiksi a (näin tehdään kohdissa b), d) ja f)). Herbrand-kanta B muodostuu atomisista lauseista, jotka ovat konstruoitavissa klausuulijoukossa esiintyvistä predikaattisymboleista käyttämällä argumentteina Herbrand-universumin U termejä.

- a) $U = \{c\}, B = \{G(c, c)\}$.
- b) $U = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}, B = \{P(e_1, e_2) \mid e_1 \in U, e_2 \in U\}$.
- c) $U = \{a, b\}, B = \{P(a), P(b)\}$.
- d) $U = \{a\}, B = \{P(a, a), G(a, a)\}$.
- e) $U = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), \dots\},$
 $B = \{P(e_1, e_2) \mid e_1 \in U, e_2 \in U\} \cup \{Q(e_1, e_2) \mid e_1 \in U, e_2 \in U\}$.
- f) $U = \{a, f(a, a), f(a, f(a, a)), f(f(a, a), a), f(f(a, a), f(a, a)), \dots\},$
 $B = \{P(e) \mid e \in U\} \cup \{Q(e) \mid e \in U\}$.

Tehtävä 14.2

- a) Lauseesta $\forall x P(x, a, x)$ saadaan klausuuli $\{P(x, a, x)\}$. Lausejoukon toinen lause $\neg(\exists x \exists y \exists z (P(x, y, z) \wedge \neg P(x, f(y), f(z))))$ tuottaa klausuulin $\{\neg P(x, y, z), P(x, f(y), f(z))\}$. Näin ollen saadaan klausuulijoukko

$$S = \{\{P(x, a, x)\}, \{\neg P(x, y, z), P(x, f(y), f(z))\}\}.$$

- b) Herbrand-universumi $H = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\} = \{f^n(a) \mid n \geq 0\}$ ja Herbrand-kanta $B = \{P(e_1, e_2, e_3) \mid e_1, e_2, e_3 \in H\}$.

- c) Maksimaalinen Herbrand-malli S :lle saadaan B :stä, sillä jokainen termi muotoa $P(f^n(a), a, f^n(a))$, $n \geq 0$ kuuluu B :hen (ensimmäinen klausuuli toteutuu), ja jokainen termi muotoa $P(f^n(a), f^{m+1}(a), f^{k+1}(a))$, missä $n, m, k \geq 0$, kuuluu B :hen (toinen klausuuli toteutuu).

Minimaalinen Herbrand-malli on $\{P(a, a, a), P(a, f(a), f(a))\}$.

Tehtävä 14.3

Muodosta lauseen klausuulimuoto S (äärellinen, ei funktiosymboleja), etsi S :n Herbrand universumi H ja edelleen Herbrand-instanssien joukko S' (äärellinen). Tämän voit nähdä lauselogiikan klausuulijoukkona ja käyttää esimerkiksi (lauselogiikan) resoluutiota saadun lauselogiikan klausuulijoukon pätevyuden tarkastelemiseen.

Tehtävä 14.5

Substituutioita kompositoitaessa on kiinnitettävä huomiota kahteen asiaan:

- Mikäli tulos olisi muotoa x/x , sitä ei kirjata lopputulokseen.
- Jos jälkimmäinen substituutio korvaa samaa muuttujaa kuin edellinen, korvaus suoritetaan ensimmäisen substituution perusteella.

Näin saadaan:

$$\{y/b, z/f(g(a)), w/c\}$$

Tehtävä 14.6

Sovelletaan unifikaatioalgoritmia vaiheittain:

- a) $\sigma_0 = \varepsilon$ (tyhjä substituutio)
- $$S_0 = \{P(x, g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$$
- $$D(S_0) = \{x, f(y)\}$$
- $$\sigma_1 = \{x/f(y)\}$$
- $$\sigma_0\sigma_1 = \{x/f(y)\}$$
- $$S_1 = \{P(f(y), g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$$
- $$D(S_1) = \{y, f(z)\}$$
- $$\sigma_2 = \{y/f(z)\}$$
- $$\sigma_0\sigma_1\sigma_2 = \{x/f(f(z)), y/f(z)\}$$
- $$S_2 = \{P(f(f(z)), g(f(z)), f(a)), P(f(f(z)), g(f(z)), z)\}$$
- $$D(S_2) = \{f(a), z\}$$
- $$\sigma_3 = \{z/f(a)\}$$
- $$\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \{x/f(f(f(a))), y/f(f(a)), z/f(a)\}$$
- $$S_3 = \{P(f(f(f(a))), g(f(f(a))), f(a))\}$$
- Unifiointi onnistui, yleisin unifioija on $\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

b) $\sigma_0 = \varepsilon$
 $S_0 = \{P(x, f(x), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
 $D(S_0) = \{x, a, y\}$
 $\sigma_1 = \{x/a\}$
 $S_1 = \{P(a, f(a), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
 $D(S_1) = \{a, y\}$
 $\sigma_2 = \{y/a\}$
 $S_2 = \{P(a, f(a), g(a)), P(a, f(g(a)), g(a))\}$
 $D(S_2) = \{a, g(a)\}$
 Termit a ja $g(a)$ eivät unifioidu; unifiointi ei siis onnistu.

c) $\sigma_0 = \varepsilon$
 $S_0 = \{P(x, f(x, y)), P(y, f(y, a)), P(b, f(b, a))\}$
 $D(S_0) = \{x, y, b\}$
 $\sigma_1 = \{x/b\}$
 $S_1 = \{P(b, f(b, y)), P(y, f(y, a)), P(b, f(b, a))\}$
 $D(S_1) = \{b, y\}$
 $\sigma_2 = \{y/b\}$
 $S_2 = \{P(b, f(b, b)), P(b, f(b, a))\}$
 $D(S_2) = \{b, a\}$
 Termit b ja a eivät unifioidu; unifiointi ei onnistu.

d) $\sigma_0 = \varepsilon$
 $S_0 = \{P(f(a), y, z), P(y, f(a), b), P(x, y, f(z))\}$
 $D(S_0) = \{f(a), y, x\}$
 $\sigma_1 = \{y/f(a)\}$
 $S_1 = \{P(f(a), f(a), z), P(f(a), f(a), b), P(x, f(a), f(z))\}$
 $D(S_1) = \{f(a), x\}$
 $\sigma_2 = \{x/f(a)\}$
 $S_2 = \{P(f(a), f(a), z), P(f(a), f(a), b), P(f(a), f(a), f(z))\}$
 $D(S_2) = \{z, b, f(z)\}$ (z :aa ei voi korvata $f(z)$:lla)
 $\sigma_3 = \{z/b\}$
 $S_3 = \{P(f(a), f(a), b), P(f(a), f(a), f(b))\}$
 $D(S_3) = \{b, f(b)\}$
 Termit b ja $f(b)$ eivät unifioidu; unifiointi ei onnistu.

Tehtävä 14.7

- a) Olkoon $\sigma = \{x/a\}$ ja $\lambda = \{x/b\}$. Näille pätee $\sigma\lambda \neq \lambda\sigma$.
- b) Lausejoukolla $S = \{P(x), P(y)\}$ on olemassa kaksi yleisintä unifioijaa: $\{x/y\}$ ja $\{y/x\}$.

Tehtävä 14.8

Yleisimmäksi unifioijaksi saadaan unifikaatioalgoritmiä soveltaen

$$\{x/f(w, w), y/f(f(w, w), f(w, w)), \\ z/f(f(f(w, w), f(w, w)), f(f(w, w), f(w, w)))\}.$$

Tehtävä 14.9

Kuvitellaan, että universumi koostuu joukosta miehiä. Käytetään formalisoinnissa seuraavia predikaatteja: $P(x)$ = “ x on parturi” ja $A(x, y)$ = “ x ajaa y :n parran”.

- a) $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(\neg A(y, y) \rightarrow A(x, y)))$,
- b) $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(A(y, y) \rightarrow \neg A(x, y)))$.

Muodostetaan klausuulit:

- a) $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(\neg A(y, y) \rightarrow A(x, y)))$
 $\forall x(\neg P(x) \vee \forall y(A(y, y) \vee A(x, y)))$
 $\forall x \forall y(\neg P(x) \vee A(y, y) \vee A(x, y))$
 $\neg P(x) \vee A(y, y) \vee A(x, y)$
 $\{\neg P(x_1), A(y_1, y_1), A(x_1, y_1)\}$
- b) $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(A(y, y) \rightarrow \neg A(x, y)))$
 $\forall x(\neg P(x) \vee \forall y(\neg A(y, y) \vee \neg A(x, y)))$
 $\forall x \forall y(\neg P(x) \vee \neg A(y, y) \vee \neg A(x, y))$
 $\neg P(x) \vee \neg A(y, y) \vee \neg A(x, y)$
 $\{\neg P(x_2), \neg A(y_2, y_2), \neg A(x_2, y_2)\}$

Halutaan todistaa $\neg \exists x P(x)$ ja siksi muodostetaan lauseen negaatio $\exists x P(x)$. Tämä lause muutetaan klausuulimuotoon $\{P(a)\}$.

Klausuuleista

$$\{\neg P(x_1), A(y_1, y_1), A(x_1, y_1)\} \quad \text{ja} \quad \{\neg P(x_2), \neg A(y_2, y_2), \neg A(x_2, y_2)\}$$

saadaan

$$\{\neg P(x_3)\} \quad (\text{substituutio } \{x_1/x_3, x_2/x_3, y_1/x_3, y_2/x_3\})$$

Klausuuleista $\{P(a)\}$ ja $\{\neg P(x_3)\}$ saadaan tyhjä klausuuli (substituutio $\{x_3/a\}$). Täten klausuulijoukko on toteutumaton ja $\neg \exists x P(x)$ seuraa loogisesti premisseistä.

Tehtävä 14.10

Todetaan ensin perustapaukset, s.o. että 0 on kahdella ja kolmella jaollinen.

$$J2(0),$$

$$J3(0).$$

Edelleen, kuinka näistä päätellään jaollisuus suuremmille luvuille:

$$\forall x(J2(x) \rightarrow J2(s(s(x)))),$$

$$\forall x(J3(x) \rightarrow J3(s(s(s(x))))).$$

Ja lopuksi määritellään kuudella jaollisuus:

$$\forall x(J2(x) \wedge J3(x) \rightarrow J6(x)).$$

Jotta resoluutiota voisi soveltaa, tulee lauseet muuttaa klausuulimuotoon. Tässä tapauksessa se on melko suoraviivaista.

$$\forall x(J2(x) \rightarrow J2(s(s(x))))$$

$$\forall x(\neg J2(x) \vee J2(s(s(x))))$$

$$\{\neg J2(x), J2(s(s(x)))\}.$$

Samoin $J3(x)$ -predikaatin määrittelevälle lauseelle saadaan $\{\neg J3(x), J3(s(s(s(x))))\}$. Edelleen $J6(x)$:n määrittelevä lause saadaan muotoon:

$$\forall x(J2(x) \wedge J3(x) \rightarrow J6(x))$$

$$\forall x(\neg(J2(x) \wedge J3(x)) \vee J6(x))$$

$$\forall x(\neg J2(x) \vee \neg J3(x) \vee J6(x))$$

$$\{\neg J2(x), \neg J3(x), J6(x)\}.$$

Kyselyn negaatiosta tulee seuraavat kolme klausuulia:

$$\neg \forall x(J2(x) \wedge J3(x) \rightarrow J6(s^6(x)))$$

$$\neg \forall x(\neg(J2(x) \wedge J3(x)) \vee J6(s^6(x)))$$

$$\neg \forall x(\neg J2(x) \vee \neg J3(x) \vee J6(s^6(x)))$$

$$\exists x \neg(\neg J2(x) \vee \neg J3(x) \vee J6(s^6(x)))$$

$$\exists x(J2(x) \wedge J3(x) \wedge \neg J6(s^6(x)))$$

$$\{J2(c)\}, \{J3(c)\} \text{ ja } \{\neg J6(s^6(c))\}.$$

Resoluutio laaditaan seuraavasti:

1. $\{J2(c)\}, P$
2. $\{\neg J2(x_1), J2(s(s(x_1)))\}, P$
3. $\{J2(s(s(c)))\}, 1 \ \& \ 2, x_1/c$
4. $\{\neg J2(x_2), J2(s(s(x_2)))\}, P$
5. $\{J2(s^4(c))\}, 3 \ \& \ 4, x_2/s(s(c))$
6. $\{\neg J2(x_3), J2(s(s(x_3)))\}, P$
7. $\{J2(s^6(c))\}, 5 \ \& \ 6, x_3/s^6(c)$
8. $\{J3(c)\}, P$
9. $\{\neg J3(x_4), J3(s(s(s(x_4))))\}, P$
10. $\{J3(s(s(s(c))))\}, 8 \ \& \ 9, x_4/c$
11. $\{\neg J3(x_5), J3(s(s(s(x_5))))\}, P$
12. $\{J3(s^6(c))\}, 10 \ \& \ 11, x_4/s(s(s(c)))$
13. $\{\neg J2(x_6), \neg J3(x_6), J6(x_6)\}, P$
14. $\{\neg J3(s^6(c)), J6(s^6(c))\}, 7 \ \& \ 13, x_6/s^6(c)$
15. $\{J6(s^6(c))\}, 12 \ \& \ 14$
16. $\{\neg J6(s^6(c))\}, P$
17. $\square, 15 \ \& \ 16$

Resoluutiosta saatiin tyhjä klausuuli, so. väite pitää paikkansa.