T-79.3001 Logiikka tietotekniikassa: perusteet **Kevät 2008**
Laskuharjoitus 5 (lauselogiikka 6.1 – 7.2)
27.–29.2.2008

Ratkaisuja demotehtäviin

Tehtävä 6.1

a) $A \to (B \to C)$
Poistetaan lauseesta ensin implikaatiot.

$$\begin{aligned} A \to (B \to C) &\equiv \neg A \vee (\neg B \vee C) \\ &\equiv \neg A \vee \neg B \vee C. \end{aligned}$$

Näin syntynyt muoto on sekä konjunktiivinen että disjunktiivinen normaalimuoto. Haettaessa disjunktiivista normaalimuotoa semanttisen taulun avulla lähdetään liikkeelle solmusta, jossa lause esiintyy totena:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& T(A \to (B \to C)) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
E(A) & & T(B \to C) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
& E(B) & & T(C)
\end{tikzcd}$$

Nyt avoimista haaroista saadaan luettua disjunktit. Tässä tapauksessa niissä kussakin on vain 1 literaali. Saadaan siis $\neg A \vee \neg B \vee C$, joka on sama kuin muunnossäännöillä.

Konjunktiivinen normaalimuoto haetaan taulusta, jossa juurena on lause epätotena:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
E(A \to (B \to C)) \arrow[d, dash] \\
T(A) \arrow[d, dash] \\
E(B \to C) \arrow[d, dash] \\
T(B) \arrow[d, dash] \\
E(C)
\end{tikzcd}$$

Avoimesta haarasta saadaan lause $A \land B \land \neg C$, joka on alkuperäisen lausee negaation disjunktiivinen normaalimuoto. Negatoidaan tämä, jolloin päästään takaisin alkuperäiseen lauseeseen, ja sen konjunktiivinen normaalimuoto saadaan de Morganin sääntöä soveltamalla:

$$\begin{aligned} A \to (B \to C) &\equiv \neg\neg(A \to (B \to C)) \\ &\equiv \neg(\neg(A \to (B \to C))) \\ &\equiv \neg(A \land B \land \neg C) \\ &\equiv \neg A \lor \neg B \lor C. \end{aligned}$$

b) $\neg A \leftrightarrow ((A \lor \neg B) \to B)$
Poistetaan lauseesta ensin ekvivalenssi ja implikaatiot, sitten siirretään negaatiot atomisten lauseiden eteen ja lopulta sovelletaan disjunktion distributiivisuutta konjunktion yli (eli konjunktiot ulos).

$$\begin{aligned} &\neg A \leftrightarrow ((A \lor \neg B) \to B) \\ &\quad \equiv (\neg A \to ((A \lor \neg B) \to B)) \land (((A \lor \neg B) \to B) \to \neg A) && [\leftrightarrow\ e] \\ &\quad \equiv (A \lor (\neg(A \lor \neg B) \lor B)) \land (\neg(\neg(A \lor \neg B) \lor B) \lor \neg A) && [\to e] \\ &\quad \equiv (A \lor ((\neg A \land B) \lor B)) \land (((A \lor \neg B) \land \neg B) \lor \neg A) && [\neg\ s] \\ &\quad \equiv (A \lor ((\neg A \lor B) \land (B \lor B))) \land ((A \lor \neg B \lor \neg A) \land (\neg B \lor \neg A)) && [\land\ u] \\ &\quad \equiv (A \lor \neg A \lor B) \land (A \lor B) \land (A \lor \neg A \lor B) \land (\neg A \lor \neg B) && [\land\ u] \\ &\quad \equiv (A \lor B) \land (\neg A \lor \neg B). \end{aligned}$$

Tämä on konjunktiivinen normaalimuoto. Viimeisessä vaiheessa on sievennetty aina todet disjunktiot $A \lor \neg A \lor B \equiv \top$. Käytetään seuraavaksi konjunktion distributiivisuutta disjunktion yli, jolloin päädytään disjunktiiviseen normaalimuotoon:

$$\begin{aligned} &(A \lor B) \land (\neg A \lor \neg B) \\ &\quad \equiv (A \land (\neg A \lor \neg B)) \lor (B \land (\neg A \lor \neg B)) && [\lor\ u] \\ &\quad \equiv (A \land \neg A) \lor (A \land \neg B) \lor (\neg A \land B) \lor (B \land \neg B) && [\lor\ u] \\ &\quad \equiv (A \land \neg B) \lor (\neg A \land B) \end{aligned}$$

Viimeisessä vaiheessa on käytetty sievennyssääntöjä, joissa moninkertaiset esiintymät samassa konjunktissa on eliminoitu samoin kuin aina epätodet konjuntit, joissa on esiintyy sekä literaali että sen komplementti.

Tarkastelu tauluilla:

- $T(\neg A \leftrightarrow ((A \vee \neg B) \to B))$
  - $T(\neg A)$
    - $T((A \vee \neg B) \to B)$
    - $E(A)$
      - $E(A \vee \neg B)$
        - $E(A)$
        - $E(\neg B)$
        - $T(B)$
      - $T(B)$
  - $E(\neg A)$
    - $E((A \vee \neg B) \to B)$
    - $T(A)$
    - $T(A \vee \neg B)$
    - $E(B)$
      - $T(A)$
      - $T(\neg B)$
        - $E(B)$

Taulusta avoimia haaroja lukemalla saadaan muoto $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$, joka on sama kuin muunnossäännöillä. Konjuntiivinen normaalimuoto samalla periaatteella kuin a)-kohdassa.

c) $\neg((A \leftrightarrow \neg B) \to C)$

$$\begin{aligned}
&\neg((A \leftrightarrow \neg B) \to C) \\
&\qquad \equiv \neg((A \to \neg B) \wedge (\neg B \to A) \to C) && [\leftrightarrow e] \\
&\qquad \equiv \neg(\neg((\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg\neg B \vee A)) \vee C) && [\to e] \\
&\qquad \equiv (\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B) \wedge \neg C \; (*) && [\neg\ s]
\end{aligned}$$

Tämä onkin jo konjuntiivinen normaalimuoto. Käytetään seuraavaksi konjunktion distributiivisuutta disjunktion yli:

$$\begin{aligned}
(*) &\equiv (\neg A \vee \neg B) \wedge ((B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg C)) && [\vee\ u] \\
&\equiv (\neg A \wedge ((B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg C))) \vee \\
&\qquad (\neg B \wedge ((B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg C))) && [\vee\ u] \\
&\equiv (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge A \wedge \neg C) \vee \\
&\qquad (\neg B \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge A \wedge \neg C) && [\vee\ u] \\
&\equiv (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C).
\end{aligned}$$

Lause on disjunktiivisessa normaalimuodossa. Viimeisessä vaiheessa on jätetty pois aina epätodet konjunktiot, eli ne, joissa esiintyy jokin atominen lause ja sen negaatio.

d) $P_1 \wedge P_2 \leftrightarrow (P_1 \to P_2) \vee (P_2 \to P_3)$

Tehtävän laadinnassa kävi sikäli mielenkiintoisesti, että ekvivalenssin oikealla puolella oleva termi on pätevä (tarkista!). Nyt analyysi voidaan tehdä, korvaamalla se aina todella lauseella $\top$. Saadaan:

$$\begin{aligned}
&P_1 \wedge P_2 \leftrightarrow \top \\
&\quad \equiv (P_1 \wedge P_2 \to \top) \wedge (\top \to P_1 \wedge P_2) && [\leftrightarrow e] \\
&\quad \equiv (\neg(P_1 \wedge P_2) \vee \top) \wedge (\neg\top \vee (P_1 \wedge P_2)) && [\to e] \\
&\quad \equiv (\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \top) \wedge (\bot \vee P_1) \wedge (\bot \vee P_2) && [\neg\ s] \\
&\quad \equiv P_1 \wedge P_2.
\end{aligned}$$

Sievennyssäänntöjä voi soveltaa siten, että ensimmäinen konjunkti on aina tosi ja kahdessa viimeisessä ensimmäiset termit voi poistaa, koska ne ovat aina epätosia. Syntynyt tulos on sekä KNM että DNM.

Tehtävä 6.2

Tarkastele semanttisella taululla lauseiden $(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow ((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha))$, $(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$, $\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$, jne. pätevyyttä.

Tehtävä 6.3

a) Muuntamisessa käytetään disjunktion distributiivisuutta konjunktion yli:

$$\begin{aligned}
&(P \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg Q) \\
&\quad \equiv ((P \wedge \neg P) \vee Q) \wedge ((P \wedge \neg P) \vee \neg Q) \\
&\quad \equiv (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)
\end{aligned}$$

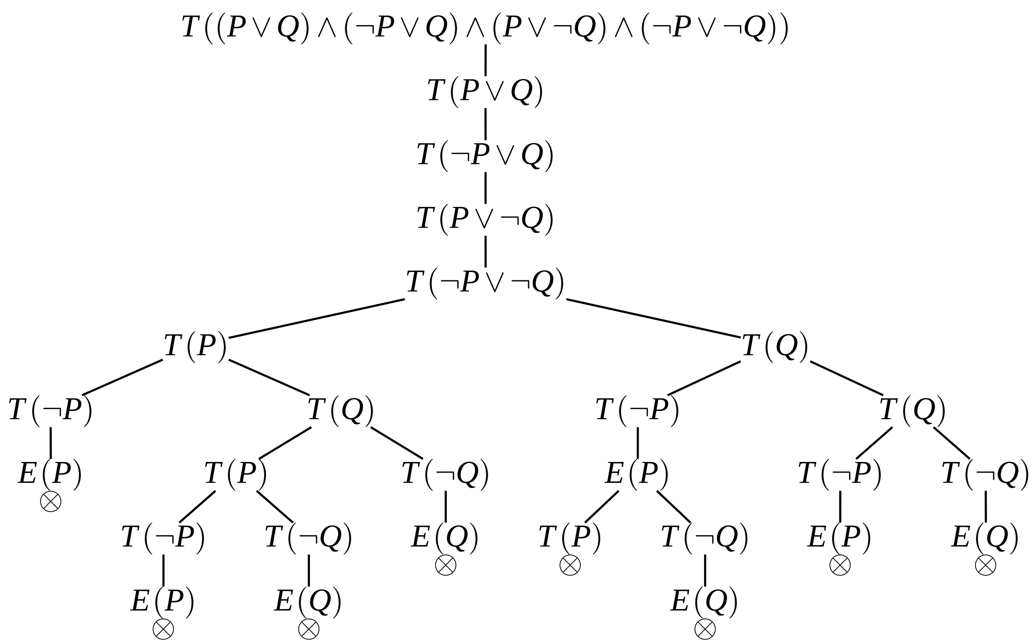
Semanttisella taululla samoin kuin 4. tehtävässä, kts. a)-kohta.

b) Muuntaminen etenee samoilla säännöillä. Kuten a)-kohdassakin, lopputulokseen tulevat kaikki kombinaatiot (2^n) totuusarvoille:

$$\begin{aligned}
&(P_1 \wedge \neg P_1) \vee \cdots \vee (P_n \wedge \neg P_n) \\
&\quad \equiv (P_1 \vee \cdots \vee P_n) \wedge (\neg P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n) \wedge \cdots \wedge (\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n)
\end{aligned}$$

Tehtävä 6.4

Osoittaminen tapahtuu lähtemällä liikkeelle semanttisesta taulusta, jonka juuressa on lause todeksi asetettuna. Jos lause on toteutumaton, taulu on ristiriitainen.



Tehtävä 7.1

Lähdetään poistamaan implikaatiot:

$$\begin{array}{rrcl}
 & (A \to ((A \to A) \to A)) & \to & ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) \\
\equiv & \neg(A \to ((A \to A) \to A)) & \vee & ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) \\
\equiv & \neg(\neg A \vee ((A \to A) \to A)) & \vee & ((\neg A \vee (A \to A)) \to (A \to A)) \\
\equiv & \neg(\neg A \vee (\neg(\neg A \vee A) \vee A)) & \vee & (\neg(\neg A \vee (\neg A \vee A)) \vee (\neg A \vee A))
\end{array}$$

Edelleen viedään negaatiot atomilauseiden eteen:

$$\begin{array}{rrcl}
 & \neg(\neg A \vee (\neg(\neg A \vee A) \vee A)) & \vee & (\neg(\neg A \vee (\neg A \vee A)) \vee (\neg A \vee A)) \\
\equiv & (\neg\neg A \wedge \neg(\neg(\neg A \vee A) \vee A)) & \vee & ((\neg\neg A \wedge \neg(\neg A \vee A)) \vee (\neg A \vee A)) \\
\equiv & (A \wedge (\neg\neg(\neg A \vee A) \wedge \neg A)) & \vee & ((A \wedge \neg(\neg A \vee A)) \vee (\neg A \vee A)) \\
\equiv & (A \wedge ((\neg A \vee A) \wedge \neg A)) & \vee & ((A \wedge (A \wedge \neg A)) \vee (\neg A \vee A))
\end{array}$$

Siirretään distribuutiosäännöillä disjunktiot sisään ja konjunktiot ulos:

$$\begin{array}{rl}
 & (A \wedge ((\neg A \vee A) \wedge \neg A)) \vee ((A \wedge (A \wedge \neg A)) \vee (\neg A \vee A)) \\
\equiv & (A \wedge ((\neg A \vee A) \wedge \neg A)) \vee ((A \vee (\neg A \vee A)) \wedge ((A \wedge \neg A) \vee (\neg A \vee A))) \\
\equiv & (A \wedge ((\neg A \vee A) \wedge \neg A)) \vee ((A \vee \neg A \vee A) \wedge (A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg A \vee A)) \\
\equiv & (A \vee ((A \vee \neg A \vee A) \wedge (A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg A \vee A)) \wedge \\
 & (\neg A \vee A) \wedge \neg A) \vee ((A \vee \neg A \vee A) \wedge (A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg A \vee A)) \\
\equiv & (A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge (A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge (A \vee \neg A \vee \neg A \vee A) \wedge \\
 & (\neg A \vee A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge \\
 & (\neg A \vee A \vee \neg A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge \\
 & (\neg A \vee \neg A \vee \neg A \vee A)
\end{array}$$

Kun tulokseen sovelletaan normaalimuotojen sievennyssääntöä, jossa poistetaan disjunktiot, joissa esiintyy literaali ja sen komplementti, havaitaan, että kaikki syntyneet 9 klausuulia eliminoituvat. Tuloksena saatava klausuulijoukko on siis tyhjä ($\emptyset$), ja on siten aina tosi. Näin pitääkin olla, sillä annettu lause on pätevä (tarkista esimerkiksi semanttisella taululla).

Tehtävä 7.2

Tarkastellaan joukon S kahta ensimmäistä klausuulia. Ne voidaan lauseena kirjoittaa muodossa $(A_0 \vee A_1) \wedge (\neg A_0 \vee \neg A_1)$. Tällä lauseella on mallit $\mathcal{A}_1 = \{A_0\}$ ja $\mathcal{A}_2 = \{A_1\}$, eli se kuvaa ehdoton-tai operaatiota (XOR). Näin ollen koko klausuulijoukko S kuvaa lausetta:

$$(A_0 \underline{\vee} A_1) \wedge (A_1 \underline{\vee} A_2) \wedge \cdots \wedge (A_n \underline{\vee} A_0)$$

Tarkastellaan lausetta n:n kahdella arvolla. Kun $n = 1$ lause saa muodon $(A_0 \underline{\vee} A_1) \wedge (A_1 \underline{\vee} A_0)$. Kun tässä valitaan A_0 todeksi, seuraa siitä, että A_1 on epätosi. Nyt molemmat konjunktit toteutuvat. Vastaavasti kun valitaan A_0 epätodeksi. Klausuulijoukon mallit ovat siis $\{A_0\}$ ja $\{A_1\}$.

Nyt jos $n = 2$, kaava on muotoa $(A_0 \underline{\vee} A_1) \wedge (A_1 \underline{\vee} A_2) \wedge (A_2 \underline{\vee} A_0)$. Jos tässä valitsee A_0:n todeksi, seuraa siitä, että A_1 on epätosi ja taas A_2 tosi. Nyt viimeinen ehdoton-tai kuitenkin edellyttäisi toteutuakseen, että A_0 on epätosi. Tämä aiheuttaa ristiriidan ja näin ei saada mallia. Jos A_0 valittiin aluksi epätodeksi, syntyy samanlainen ristiriita. Tässä tapauksessa klausuulijoukolla ei ole yhtään mallia.

Tarkastelun voi yleistää siten, että jos n on pariton saadaan edellämainitulla tekniikalla 2 mallia $\{A_0, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$ ja $\{A_1, A_3, \ldots, A_n\}$, ja jos n on parillinen, ei malleja ole (todista!).

Tehtävä 7.3

Tehdään vastaoletus $\mathcal{A} \not\models S$. Tällöin joukossa S on klausuuli

$$\{A, \neg B_1, \ldots, \neg B_n\},$$

joka ei toteudu. Jotta näin on, pitää olla $\{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq \mathcal{A}$ (eli $\mathcal{A} \models B_i$ kaikilla $1 \leq i \leq n$) ja $A \notin \mathcal{A}$ (eli $\mathcal{A} \not\models A$). Joukko-opillisen leikkauksen määritelmän mukaan pitää myös olla $\{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq \mathcal{A}_1$ ja $\{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq \mathcal{A}_2$. Koska $\mathcal{A}_1$ ja $\mathcal{A}_2$ ovat klausuulijoukon S malleja, pitää olla myös $A \in \mathcal{A}_1$ ja $A \in \mathcal{A}_2$. Tällöin kuitenkin $A \in \mathcal{A}$ leikkauksen määritelmän perusteella, ja tämä aiheuttaa ristiriidan. Näin ollen $\mathcal{A} \models S$. $\square$