MALLINTARKASTUS

1. Johdanto mallintarkastukseen
2. Globaali ja lokaali mallintarkastus
3. Toteutustekniikkaa
4. LTL-mallintarkastus
5. Laskennallinen vaativuus (yhteenveto)

E. M. Clarke et al.: *Model Checking*, luku 4 (s. 35–49).

E. A. Emerson: *Automated Temporal Reasoning about Reactive Systems*, luku 3 (s. 16–18).

1. Johdanto mallintarkastukseen

Onko annettu lause P tosi annetussa mallissa M?

- Malli M: järjestelmän malli.

  Saadaan järjestelmän kuvauksesta, joka on usein annettu jollain spesifiointikielellä: SDL, VHDL, prosessialgebra, automaatit, Petri-verkot, SMV, PROMELA ...

- Lause P: järjestelmän suhteen kiinnostava ominaisuus.

  Annettu usein temporaalilogiikalla: CTL, LTL, CTL*, ...

  – Täysin automatisoitavissa.

  – Realististen järjestelmien mallit usein suuria.

  – Jo nykyiset tekniikat teollisesti sovellettavissa.

Mallin generointi

Mallintarkastusta varten järjestelmän kuvauksesta muodostetaan mahdollisten maailmojen malli M:

- Eksplisiittinen esitystapa:

  Malli M muodostetaan kuvauksesta saavutettavuusanalyysi-tekniikalla ennen mallintarkastusta (tilaräjähdys).

- On-the-fly -tekniikka:

  Malli M muodostetaan kuvauksesta saavutettavuusanalyysi-tekniikalla mallintarkastuksen aikana tarpeen mukaan.

- Symbolinen esitystapa:

  Tilasiirtymärelaatio esitetään Boolen funktiona symbolisesti.

Tila-avaruuden symbolinen esittäminen

- Järjestelmän kokonaistila esitetään binäärisesti (n tilabittiä).
- Otetaan käyttöön kullekin tilabitille i kaksi atomilausetta v_i (nykyinen tila) ja v_i' (uusi tila).
- Määritellään kullekin tilabitille i tilasiirtymäehdon antava lause

  $$v_i' \leftrightarrow (v_i \wedge v_{i+1}) \vee \neg v_{i+3}$$

  joiden konjunktiona saadaan tilasiirtymärelaatiolle lause $T(\vec{v},\vec{v'})$.
- Lause $T(\vec{v},\vec{v'})$ kertoo symbolisesti mahdolliset tilasiirtymät: Järjestelmä voi siirtyä esim. tilasta $(0,\ldots,0)$ tilaan $(1,\ldots,1)$ joss lause $T(\vec{v},\vec{v'})$ on tosi mallissa, jossa kaikki v_i atomit ovat epätosia ja kaikki v_i' atomit ovat tosia.

Saavutettavuusrelaation kompositio

- Nyt järjestelmän saavutettavílle tiloille voidaan muodostaa lause $R(\vec{v})$ iteratiivisesti:
  1. $R_0(\vec{v}) := I(\vec{v})$, missä $I(\vec{v})$ antaa mahdolliset alkutilat.
  2. Toistetaan kaikilla $i = 1, 2, \ldots$
     $$R_i(\vec{v}) := \exists \vec{w}(R_{i-1}(\vec{w}) \wedge T(\vec{w}, \vec{v}))$$
     kunnes $R_i(\vec{v}) \equiv R_{i-1}(\vec{v})$ (ovat loogisesti ekvivalentteja).
- $R_i(\vec{v})$ kertoo symbolisesti saavutettavat tilat: esim. tila $(0, \ldots, 0)$ on saavutettavissa joss lause $R_i(\vec{v})$ on tosi mallissa, jossa kaikki v_i atomit ovat epätosia.
- Voidaan esittää suuria tila-avaruuksia erittäin tiiviisti: esim. $R_i(\vec{v}) = v_1$ esittää 2^{n-1} saavutettavaa tilaa (ts. kaikki tilat, joissa tilabitti v_1 on 1).

Mallintarkastimet

Mallintarkastin

- ottaa tyypillisesti syötteekseen (i) spesifiointikielellä annetun mallin ja (ii) temporaalilogiikalla annetun lauseen (vaatimusmäärittelyn) ja
- antaa vastauksena ilmoituksen, että lause on tosi mallissa tai vastaesimerkin (mallin suorituksen, jossa lause ei toteudu).
- Mallintarkastinta voidaan käyttää siis "debuggaukseen" eli virheiden etsimiseen järjestelmän spesifikaatiosta.

Esimerkki: SMV-mallintarkastin

Toteutusteknisiä ratkaisuja:

- Symbolinen tila-avaruuden esitystapa käytössä.
- Tarvittavat lauseet esitetään tehokkaassa OBDD-normaalimuodossa (ordered binary decision diagrams).
- Myös temporaalilogiikan lauseen tarkastaminen voidaan tehdä symbolisesti.

Esimerkki mallin SMV-kuvauksesta

```
MODULE main

VAR
state1: {s1, n1};
ASSIGN
init(state1) := s1;
next(state1) :=
case
  (state1 = s1) &
        (state2 = s2): n1;
  (state1 = n1) : {n1, s1};
  1: state1;
esac;
```

```
VAR
state2: {s2, n2};
ASSIGN
init(state2) := s2;
next(state2) :=
case
  (state1 = s1) &
         (state2 = s2): n2;
  (state2 = n2) : {n2, s2};
  1: state2;
esac;

SPEC
AF ((state1 = n1) &
    (state2 = s2))
```

Esimerkkin mallintarkastuksesta SMVllä

```
$ smv example.smv
-- specification AF (state1 = n1 & state2 = s2) is false
-- as demonstrated by the following execution sequence
-- loop starts here --
state 1.1:
state1 = s1
state2 = s2

state 1.2:
state1 = n1
state2 = n2

state 1.3:
state1 = s1
state2 = s2
```


2. Globaali ja lokaali mallintarkastus

- Globaali mallintarkastus:
  Missä mallin M tiloissa annettu lause P on tosi?
- Lokaali mallintarkastus:
  Onko lause P tosi mallin M annetussa tilassa s_0?
- Lokaali mallintarkastus (yhdistettynä on-the-fly -tekniikkaan) mahdollistaa mallintarkastuksen, jossa mallin kaikkia tiloja ei tarvitse välttämättä tutkia (eikä edes muodostaa).
- Globaalin mallintarkastuksen toteuttaminen on suoraviivaisempaa ja se voidaan saada tehokkaaksi ja vähemmän muistia käyttäväksi.

Globaali CTL-mallintarkastus

- Globaali mallintarkastusmenetelmä määrää lauseen totuusarvon mallin kaikissa tiloissa.
- Tämä tehdään systemaattisesti käsittelemällä vuorollaan lauseen kaikki alilauseet atomilauseista alkaen.

1. Järjestetään lauseen P alilauseet järjestykseen:
   $$P_0, P_1, \ldots, P_n (= P),$$
   missä kukin P_i esiintyy vasta kaikkien aitojen alilauseidensa jälkeen.

Esimerkki. Eräs alilausejärjestys lauseelle $\mathbf{A}(P\mathbf{U}\mathbf{E}(Q\mathbf{U}\neg P))$:

$$P,\ Q,\ \neg P,\ \mathbf{E}(Q\mathbf{U}\neg P),\ \mathbf{A}(P\mathbf{U}\mathbf{E}(Q\mathbf{U}\neg P)).$$

CTL-mallintarkastus

2. Kaikille $i = 0, 1, \ldots, n$ määrätään lauseen P_i totuusarvo jokaisessa mallin M tilassa $s \in S$ seuraavasti:
   (a) Jos P_i on atomilause, saadaan totuusarvo suoraan mallista.
   (b) Jos P_i on muotoa $\neg P_j$ tai $P_j \wedge P_l$, saadaan totuusarvo alilauseiden P_j, P_l totuusarvoista (Huom! Koska $j, l < i$, lauseiden P_j, P_l totuusarvot on tässä vaiheessa jo määrätty).
   (c) Jos P_i on muotoa $\mathbf{AX}P_j$, saadaan totuusarvo alilauseen P_j totuusarvoista kaikissa s:n seuraajissa.

Esimerkki. Olkoon $M = (S, R, v)$, missä $S = \{s_0, s_1\}$, $R = \{\langle s_0, s_0\rangle, \langle s_0, s_1\rangle, \langle s_1, s_0\rangle\}$, $v(s_0, P) = v(s_1, Q) = \text{true}$ ja $v(s_1, P) = v(s_0, Q) = \text{false}$. Nyt $M, s_i \models \neg(P \wedge Q)$ kun $i \in \{0, 1\}$.

Siis esim. $M, s_0 \models \mathbf{AX}\neg(P \wedge Q)$ ja sama voidaan todeta tilasta s_1.

2.(d) Jos P_i on muotoa $\mathbf{A}(P_j\mathbf{U}P_l)$, saadaan sen totuusarvo käyttämällä seuraavaa ekvivalenssia:

$$\mathbf{A}(P_j\mathbf{U}P_l) \equiv P_l \vee (P_j \wedge \mathbf{AXA}(P_j\mathbf{U}P_l))$$

i. Merkitään lause P_i todeksi kaikissa tiloissa, joissa P_l on tosi.

ii. Merkitään lause P_i todeksi tilassa s, jos

$$M,s \models P_j \text{ ja } M,t \models P_i \textbf{ kaikille } t \text{ joille } sRt,$$

kunnes uusia tällaisia tiloja ei löydy.

iii. Merkitään P_i epätodeksi muissa tiloissa.

Esimerkki. Olkoon $M = (S,R,v)$, missä $S = \{s_0,s_1,s_2,s_3\}$, $R = \{\langle s_0,s_1\rangle, \langle s_1,s_0\rangle, \langle s_0,s_2\rangle, \langle s_2,s_3\rangle, \langle s_3,s_3\rangle\}$, $v(s_i,P) = \text{true}$, joss $i \neq 3$, ja $v(s_i,Q) = \text{true}$, joss $i = 3$.

Täten $M,s_3 \models \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$ kohdan (i) perusteella ja $M,s_2 \models \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$ kohdan (ii) perusteella. Muille tiloille s_i pätee $M,s_i \not\models \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$ (iii).

2.(e) Jos P_i on muotoa $\mathbf{E}(P_j\mathbf{U}P_l)$, saadaan sen totuusarvo hyödyntämällä seuraavaa ekvivalenssia:

$$\mathbf{E}(P_j\mathbf{U}P_l) \equiv P_l \vee (P_j \wedge \mathbf{EXE}(P_j\mathbf{U}P_l))$$

i. Merkitään lause P_i todeksi kaikissa tiloissa, joissa P_l on tosi.

ii. Merkitään lause P_i todeksi tilassa s, jos

$$M,s \models P_j \text{ ja } M,t \models P_i \textbf{ jollekin } t \text{ jolle } sRt,$$

kunnes uusia tällaisia tiloja ei löydy.

iii. Merkitään P_i epätodeksi muissa tiloissa.

- Algoritmin aikavaativuus $O(|P| * |S| * (|S| + |R|))$.
- Temporaalioperaattoreilla alkavien lauseiden evaluointia voidaan parantaa ja päästä aikavaativuuteen $O(|P| * (|S| + |R|))$.
- Globaaliin CTL-mallintarkastusmenetelmään voidaan suoraviivaisesti yhdistää myös reiluusehtojen käsittely.

3. Toteutustekniikkaa

- Seuraavassa annetaan esimerkki siitä, miten temporaali-operaattoreiden evaluointia voidaan tehostaa niin, että saavutetaan $O(|P| * (|S| + |R|))$ aikavaativuus (evaluoimalla kukin operaattori ajassa $O(|S| + |R|)$).
- Käsitellään operaattoreita $\mathbf{E}(P_j\mathbf{U}P_l)$ ja $\mathbf{EG}P_j$; huomaa, että

$$\mathbf{A}(P_j\mathbf{U}P_l) \equiv \neg\mathbf{E}(\neg P_l\mathbf{U}(\neg P_j \wedge \neg P_l)) \wedge \neg\mathbf{EG}\neg P_l.$$

- Muotoa $\mathbf{E}(P_j\mathbf{U}P_l)$ olevien lauseiden tehokas evaluointi perustuu mallin saavutettavuusrelaation R hyödyntämiseen taaksepäin.
- Totuusarvon evaluointi on suoritettavissa seuraavaksi esitettävällä CheckEU-algoritmilla ajassa $O(|S| + |R|)$.

CheckEU: $\mathbf{E}(P_j\mathbf{U}P_l)$-lauseiden evaluointi

```
procedure CheckEU(P_j, P_l)
    T := {s | M,s ⊨ P_l};
    for all s ∈ T, label E(P_j U P_l) true in s;
    while T is not empty do
        choose s in T and remove it from T;
        for all t such that (t,s) ∈ R do
            if E(P_j U P_l) is not yet labeled true in t and M,t ⊨ P_j then
                label E(P_j U P_l) true in t;
                add t to T
            endif
        endfor
    endwhile
```

Vahvasti kytketyt komponentit

- Seuraavaksi esitettävä $\mathbf{EG}P_j$-lauseiden tehokas evaluointi perustuu mallin jakamiseen vahvasti kytkettyihin komponentteihin; engl. *strongly connected components* (SCCs).
- Graafin vahvasti kytketty komponentti C on maksimaalinen aligraafi, jossa jokainen solmu on saavutettavissa jokaisesta muusta C:n solmusta C:ssä kulkevaa polkua pitkin.
- Komponentti C on ei-triviaali joss siinä on enemmän kuin yksi solmu tai se sisältää solmun, josta on kaari itseensä.
- Vahvasti kytketyt komponentit voidaan hakea Tarjanin algoritmilla [SIAM J. of Computing, 1(2), 146–160, 1972] lineaarisessa ajassa.

$\mathbf{EG}P_j$-lauseiden evaluointi

Evaluointi perustuu mallin $\mathcal{M}$ rajoittumaan $\mathcal{M}' = (S', R', v')$, joka saadaan mallista $\mathcal{M}$ poistamalla tilat, joissa P_j on epätosi:

- $S' = \{s \in S \mid \mathcal{M}, s \models P_j\}$,
- $R' = \{(s,t) \in R \mid s,t \in S'\}$ ja
- $v'(s) = v(s)$ kaikille $s \in S'$.

Evaluointi perustuu seuraavaan mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ väliseen suhteeseen:

Lemma. $\mathcal{M}, s \models \mathbf{EG}P_j$ joss $s \in S'$ ja mallissa $\mathcal{M}'$ löytyy polku tilasta s tilaan t, joka on graafin (S', R') ei-triviaalissa vahvasti kytketyssä komponentissa.

☞ Näin lause $\mathbf{EG}P_j$ voidaan evaluoida ajassa $O(|S| + |R|)$ käyttäen seuraavalla kalvolla annettua CheckEG algoritmia.

CheckEG: $\mathbf{EG}P_j$-lauseiden evaluointi

```
procedure CheckEG(P_j)
    S' := {s ∈ S | M, s ⊨ P_j};  R' := {(s,t) ∈ R | s,t ∈ S'};
    SCC := {C | C is a non-trivial SCC of (S', R')};
    T := {s | s ∈ C and C ∈ SCC} ;
    for all s ∈ T, label EG P_j true in s;
    while T is not empty do
        choose s in T and remove it from T;
        for all t such that t ∈ S' and (t,s) ∈ R' do
            if EG P_j is not yet labeled true in t then
                label EG P_j true in t; add t to T
            endif
        endfor
    endwhile
```


4. LTL-mallintarkastus

- Seuraavassa esitetään taulujen käyttöön perustuva menetelmä, jolla voidaan tarkastaa, lähteekö annetusta tilasta täysi polku, jossa annettu LTL-lause on tosi.
- Merkitään $M, s \models \mathbf{E}P$, joss on olemassa tilasta s alkava täysi polku, jossa P on tosi.
- Tämän menetelmän avulla voidaan vastata myös muihin LTL-mallintarkastuskysymyksiin:

  Esimerkki. LTL-lause P on tosi kaikilla annetusta tilasta s lähtevillä täysillä poluilla, joss $M, s \not\models \mathbf{E}\neg P$.

Perusidea

- Kysymys $M,s \models \mathbf{E}P$ tarkistetaan rakentamalla mallista M ja lauseesta P LTL-taulu (Büchi-automaatti), joka kuvaa kaikki mallin tilasta s lähtevät täydet polut, jotka toteuttavat lauseen P.
- Taulusta on sitten helppo tarkistaa, onko tällaisia polkuja.
- Muistutus: käsitellään kieltä, jossa konnektiivit ovat $\neg, \wedge, \mathbf{X}, \mathbf{U}$. (muut konnektiivit käsitellään lyhennysmerkintöinä: esim. $P \vee Q = \neg(\neg P \wedge \neg Q)$; $\mathbf{F}P = \top \mathbf{U} P$; $\mathbf{G}P = \neg\mathbf{F}\neg P = \neg(\top \mathbf{U} \neg P)$).
- Määritellään mallintarkastusmenetelmää varten apukäsitteet:
  1. Lauseen P sulkeuma $\mathrm{CL}(P)$.
  2. Atomit (s,K), jotka muodostavat LTL-taulun solmut.

  Näiden avulla voidaan sitten määritellä varsinaiset LTL-taulut.

Lauseen sulkeuma

- Lauseen P sulkeuma $\mathrm{CL}(P)$ on pienin joukko lauseita, joka sisältää lauseen P ja toteuttaa seuraavat ehdot:
  1. $\neg P_1 \in \mathrm{CL}(P)$ joss $P_1 \in \mathrm{CL}(P)$
  2. Jos $P_1 \wedge P_2 \in \mathrm{CL}(P)$, niin $P_1, P_2 \in \mathrm{CL}(P)$.
  3. Jos $\mathbf{X}P_1 \in \mathrm{CL}(P)$, niin $P_1 \in \mathrm{CL}(P)$
  4. Jos $\neg\mathbf{X}P_1 \in \mathrm{CL}(P)$, niin $\mathbf{X}\neg P_1 \in \mathrm{CL}(P)$
  5. Jos $P_1 \mathbf{U} P_2 \in \mathrm{CL}(P)$, niin $P_1, P_2, \mathbf{X}(P_1 \mathbf{U} P_2) \in \mathrm{CL}(P)$

  (Tässä lause $\neg\neg Q$ samaistetaan lauseeseen Q.)
- Intuitiona on, että lauseen P sulkeuma $\mathrm{CL}(P)$ on niiden lauseiden joukko, joka voi vaikuttaa lauseen P totuusarvoon.

Esimerkki

Haetaan lauseen $(\neg H)\mathbf{U}C$ sulkeuman $\mathrm{CL}((\neg H)\mathbf{U}C)$ lauseet:

$(\neg H)\mathbf{U}C$	$\neg((\neg H)\mathbf{U}C)$
H	$\neg H$
C	$\neg C$
$\mathbf{X}((\neg H)\mathbf{U}C)$	$\neg\mathbf{X}((\neg H)\mathbf{U}C)$
$\mathbf{X}\neg((\neg H)\mathbf{U}C)$	$\neg\mathbf{X}\neg((\neg H)\mathbf{U}C)$

(Sulkeuma $\mathrm{CL}(P)$ on siis lauseen P laajennettu alilauseiden joukko, jossa on tietty lause ja sen negaatio aina parina mukana).

Atomit

Olkoon annettuna malli $M = (S,R,v)$ ja tutkittava lause P.

Atomi $A = (s_A, K_A)$ on pari, missä $s_A \in S$ ja $K_A \subseteq \mathrm{CL}(P) \cup \mathrm{AP} \cup \{\top\}$ (AP on kaikkien atomilauseiden joukko) siten, että joukolle K_A pätee:

1. jokaiselle atomilauseelle $P \in \mathrm{AP} \cup \{\top\}$, $P \in K_A$, joss $M, s_A \models P$;
2. jokaiselle $P_1 \in \mathrm{CL}(P)$, $P_1 \in K_A$, joss $\neg P_1 \notin K_A$;
3. jokaiselle $P_1 \wedge P_2 \in \mathrm{CL}(P)$, $P_1 \wedge P_2 \in K_A$, joss $P_1 \in K_A$ ja $P_2 \in K_A$;
4. jokaiselle $\neg\mathbf{X}P_1 \in \mathrm{CL}(P)$, $\neg\mathbf{X}P_1 \in K_A$, joss $\mathbf{X}\neg P_1 \in K_A$;
5. jokaiselle $P_1 \mathbf{U} P_2 \in \mathrm{CL}(P)$, $P_1 \mathbf{U} P_2 \in K_A$ joss $P_2 \in K_A$ tai $P_1, \mathbf{X}(P_1 \mathbf{U} P_2) \in K_A$.

Huom. Atomeja muodostettaessa lause $\neg\neg Q$ samaistetaan Q:hun.

Atomien muodostamisesta

Kun halutaan muodostaa kaikki mahdolliset atomit (s,K), voidaan käyttää esim. seuraavaa menettelyä:

- Mahdollisten joukkojen K muodostaminen voidaan nähdä (binäärisenä) hakupuuna (atomitauluna), jonka juuressa ovat tilassa s todet atomilauseet ja epätosien atomilauseiden negaatiot.
- Puu voi haarautua kullekin lauseelle $P_1 \in \mathrm{CL}(P)$ kahteen haaraan, jossa toisessa on P_1 ja toisessa sen negaatio $\neg P_1$.
  (Kussakin joukossa K jokaisesta lauseesta $P_1 \in \mathrm{CL}(P)$ joko lause $P_1 \in K$ tai lause $\neg P_1 \in K$).
- Muut säännöt (annettu alla) lisäävät haaraan lauseita, jotka huolehtivat, että atomi muodostuu annettujen ehtojen mukaan.

Säännöt atomitaulujen muodostamiseksi

$$\frac{P_1 \in \mathrm{CL}(P)}{P_1 \mid \neg P_1} \qquad \frac{P_1 \wedge P_2}{\begin{array}{c}P_1\\P_2\end{array}} \qquad \frac{\neg(P_1 \wedge P_2)}{\neg P_1 \mid \neg P_2}$$

$$\frac{\mathbf{X}P_1}{\neg\mathbf{X}\neg P_1} \qquad \frac{\neg\mathbf{X}P_1}{\mathbf{X}\neg P_1} \qquad \frac{(P_1\mathbf{U}P_2)}{\begin{array}{c|c}P_2 & P_1\\ & \mathbf{X}(P_1\mathbf{U}P_2)\end{array}} \qquad \frac{\neg(P_1\mathbf{U}P_2)}{\begin{array}{c|c}\neg P_2 & \neg P_2\\ \neg P_1 & \neg\mathbf{X}(P_1\mathbf{U}P_2)\end{array}}$$

- Haara sulkeutuu, jos se sisältää lauseen ja sen negaation.
- Avoin haara K, joka on valmis (ei uusia lauseita yo. säännöillä ja jokaiselle $P_1 \in \mathrm{CL}(P)$, $P_1 \in K$ tai $\neg P_1 \in K$), on kelvollinen K:ksi.

Esimerkki

Olkoon tutkittava lause $(\neg H)\mathbf{U}C$, $\mathrm{AP} = \{H,C\}$ ja mallissa M totuusarvot $v(s_1,H) = v(s_1,C) = \mathrm{false}$. Hakupuu (atomitaulu) muodostuu seuraavaksi:

$$\frac{\top, \neg H, \neg C}{\begin{array}{c|c}(\neg H)\mathbf{U}C & \neg((\neg H)\mathbf{U}C)\\ \hline \begin{array}{c|c} C & \neg H\\ \times & \mathbf{X}((\neg H)\mathbf{U}C)\\ & \neg\mathbf{X}\neg((\neg H)\mathbf{U}C)\end{array} & \begin{array}{c|c}\neg C & \neg C\\ H & \neg\mathbf{X}((\neg H)\mathbf{U}C)\\ \times & \mathbf{X}\neg((\neg H)\mathbf{U}C)\end{array}\end{array}}$$

Saadaan mahdollisiksi atomeiksi (s_1,K_1) ja (s_1,K_2), missä
$K_1 = \{\top, \neg H, \neg C, (\neg H)\mathbf{U}C, \mathbf{X}((\neg H)\mathbf{U}C), \neg\mathbf{X}\neg((\neg H)\mathbf{U}C)\}$ ja
$K_2 = \{\top, \neg H, \neg C, \neg((\neg H)\mathbf{U}C), \neg\mathbf{X}((\neg H)\mathbf{U}C), \mathbf{X}\neg((\neg H)\mathbf{U}C)\}$.

LTL-taulut

Määritelmä. Mallille $M = (S,R,v)$ ja lauseelle P muodostettu LTL-taulu on graafi $G = (N,E)$, missä

- solmujen joukko N on mallista M ja lauseesta P muodostettavissa olevien atomien A joukko ja
- kaarien joukolle $E \subseteq N \times N$ pätee: $(A,B) \in E$, joss
  1. $(s_A,s_B) \in R$ ja
  2. jokaiselle $\mathbf{X}P_1 \in \mathrm{CL}(P)$, $\mathbf{X}P_1 \in K_A$, joss $P_1 \in K_B$.

Esimerkki

Olkoon tutkittava lause $(\neg H)\mathbf{U}C$ ja malli $M = (S,R,v)$, missä

- $S = \{s_1, s_2\}$, $R = \{(s_1,s_2),(s_2,s_2)\}$ ja
- $v(s_1,H) = v(s_1,C) = v(s_2,H) = v(s_2,C) = \text{false}$.

Tällöin LTL-taulussa $G = (N,E)$ ovat

$$N = \{\ (s_1,K_1),(s_2,K_1),(s_1,K_2),(s_2,K_2)\ \} \text{ ja}$$
$$E = \{\ ((s_1,K_1),(s_2,K_1)),((s_2,K_1),(s_2,K_1)),$$
$$((s_1,K_2),(s_2,K_2)),((s_2,K_2),(s_2,K_2))\ \}$$

missä joukot K_1, K_2 ovat kuten edellä:
$K_1 = \{\top, \neg H, \neg C, (\neg H)\mathbf{U}C, \mathbf{X}((\neg H)\mathbf{U}C), \neg\mathbf{X}\neg((\neg H)\mathbf{U}C)\}$ ja
$K_2 = \{\top, \neg H, \neg C, \neg((\neg H)\mathbf{U}C), \neg\mathbf{X}((\neg H)\mathbf{U}C), \mathbf{X}\neg((\neg H)\mathbf{U}C)\}$.

Tulevaisuuspolut

Määritelmä. Tulevaisuuspolku on LTL-taulun G ääretön polku π siten, että jos $P_1\mathbf{U}P_2 \in K_A$ jollekin polun π atomille A, niin on olemassa atomi B, jolle $P_2 \in K_B$ ja joka on saavutettavissa atomista A polkua π pitkin.

Esimerkki. Polku $((s_1,K_1),(s_2,K_1),(s_2,K_1),(s_2,K_1),\ldots)$ ei ole tulevaisuuspolku, koska $(\neg H)\mathbf{U}C \in K_1$ ja $C \notin K_1$. Sen sijaan $((s_1,K_2),(s_2,K_2),(s_2,K_2),(s_2,K_2),\ldots)$ on tulevaisuuspolku.

Tulevaisuuspolut antavat lauseen P toteuttavia täysiä polkuja:

Lemma. Olkoon M malli, P lause ja G vastaava LTL-taulu. Tällöin $M,s \models \mathbf{E}P$, joss taulussa G on tulevaisuuspolku π, joka alkaa atomista (s,K), jossa $P \in K$.

Tulevaisuuspolkuja voidaan hakea tehokkaasti LTL-taulun itsetoteutuvien vahvasti kytkettyjen komponenttien avulla.

Itsetoteutuvuus

Määritelmä. LTL-taulun G vahvasti kytkettyä komponenttia C sanotaan itsetoteutuvaksi, joss jokaiselle atomille $A \in C$ ja jokaiselle $P_1\mathbf{U}P_2 \in K_A$ on olemassa atomi $B \in C$ siten, että $P_2 \in K_B$.

Lemma. LTL-taulussa G on atomista (s,K) alkava tulevaisuuspolku, joss atomista (s,K) on polku johonkin taulun G itsetoteutuvaan vahvasti kytkettyyn komponenttiin C.

Esimerkki. (Jatkoa) Atomista (s_1,K_1) alkavaa tulevaisuuspolkua ei ole, koska siitä ei ole polkua itsetoteutuvaan vahvasti kytkettyyn komponenttiin. Huomaa, että $\{(s_2,K_1)\}$ ei ole itsetoteutuva.

Atomista (s_1,K_2) alkava tulevaisuuspolku löytyy, koska siitä on polku itsetoteutuvaan vahvasti kytkettyyn komponenttiin $\{(s_2,K_2)\}$.

LTL-taulujen ominaisuudet

Teoreema. Olkoon M malli, P lause ja G vastaava LTL-taulu.

Tällöin $M,s \models \mathbf{E}P$, joss taulussa G on atomi (s,K) siten, että $P \in K$, sekä polku atomista (s,K) johonkin taulun G itsetoteutuvaan vahvasti kytkettyyn komponenttiin C.

Esimerkki. (Jatkoa) LTL-taulussa G ei ole atomia (s_1,K), jolle pätisi $(\neg H)\mathbf{U}C \in K$ ja josta olisi polku johonkin itsetoteutuvaan vahvasti kytkettyyn komponenttiin.

Näin ollen $M,s_1 \not\models \mathbf{E}((\neg H)\mathbf{U}C)$.

LTL mallintarkastusalgoritmi

Edellä annettu teoreema antaa lähtökohdan seuraavalle LTL-mallintarkastusalgoritmille, joka on aikavaativuudeltaan $\mathcal{O}((|S|+|R|)*2^{\mathcal{O}(|P|)})$.

Kun halutaan päättää $M,s \models \mathbf{E}P$:

1. Muodostetaan LTL-taulu G.
2. Lasketaan sen vahvasti kytketyt komponentit.
3. Haetaan näistä itsetoteutuvat komponentit C.
4. Tarkastetaan kaikille atomeille (s,K), jolle $P \in K$, löytyykö atomista (s,K) polku johonkin taulun G itsetoteutuvaan vahvasti kytkettyyn komponenttiin C.
5. Jos tälläinen polku löytyy, niin $M,s \models \mathbf{E}P$, muutoin ei.

5. Laskennallinen vaativuus (yhteenveto)

- CTL
  Mallintarkastus: **P**-täydellinen
  $O(|M| \cdot |P|)$
- LTL
  Mallintarkastus: **PSPACE**-täydellinen
  $O(|M| \cdot exp(|P|))$
- CTL*
  Mallintarkastus: **PSPACE**-täydellinen
  $O(|M| \cdot exp(|P|))$