RATKAISUMENETELMÄT

1. Taulumenetelmä CTL:lle
2. Toteutuvuuden ja pätevyyden tutkiminen
3. Laskennallinen vaativuus (yhteenveto)

E. A. Emerson: *Automated Temporal Reasoning about Reactive Systems*, luku 4 (s. 18–23).

Taustaa

- Temporaalilogiikat (CTL/LTL) ovat ratkevia, koska niillä on äärellisen mallin ominaisuus
  (eli vastamallin koolle voidaan asettaa yläraja).
- Tehokkaampia ratkaisumenetelmiä saadaan semanttisten taulujen ja automaattiteorian avulla.

Keskeiset ratkaisustrategiat

- Taulumenetelmä (esim. CTL):
  (i) Rakennetaan tutkittavalle lauseelle taulugraafi, joka sisältää (oleellisesti) kaikki lauseen mahdolliset mallit.
  (ii) Karsitaan taulua ja tarkastetaan, jäikö siihen ko. lauseen malleja.
- Automaattiteoreettinen menetelmä (esim. LTL):
  (i) Rakennetaan tutkittavalle lauseelle äärellistilainen (Büchi-) automaatti, joka hyväksyy äärettömän pitkiä sanoja (polkuja) siten, että automaatti hyväksyy (oleellisesti) kaikki lauseen toteuttavat täydet polut.
  (ii) Tarkistetaan, onko automaatin hyväksymä kieli tyhjä.

1. Taulumenetelmä CTL:lle

- CTL:n taulu on bipartiitti graafi, jossa solmut ovat lausejoukkoja ja niitä on kahdentyyppisiä: OR-solmuja ja AND-solmuja.
- Lauseelle P taulu rakennetaan muuntamalla P ensin *positiiviseen normaalimuotoon* (jossa negaatiot esiintyvät vain atomilauseiden edessä) ja etenemällä sitten kahdessa vaiheessa:
  (i) rakennetaan alustava taulu T_0 ja
  (ii) muodostetaan lopullinen taulu T_1 karsintasäännöillä T_0:sta.
- Positiivisessa normaalimuodossa käytetään konnektiiveja $\wedge$, $\vee$ ja negaatioita $\neg$ esiintyy vain atomilauseiden edessä.
- Merkintä $\sim P$: lauseen $\neg P$ positiivinen normaalimuoto.

Muunnossäännöt

CTL-lauseen positiivinen normaalimuoto muodostetaan seuraavasti:

$P \rightarrow Q$	$\mapsto$	$\neg P \vee Q$	$\neg \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$	$\mapsto$	$\mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)$
$\neg(P \vee Q)$	$\mapsto$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg \mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)$	$\mapsto$	$\mathbf{A}(\neg P\mathbf{B}Q)$
$\neg(P \wedge Q)$	$\mapsto$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg \mathbf{A}(P\mathbf{B}Q)$	$\mapsto$	$\mathbf{E}(\neg P\mathbf{U}Q)$
$\neg\neg P$	$\mapsto$	P	$\neg \mathbf{E}(P\mathbf{B}Q)$	$\mapsto$	$\mathbf{A}(\neg P\mathbf{U}Q)$
$\neg \mathbf{AG}P$	$\mapsto$	$\mathbf{EF}\neg P$			
$\neg \mathbf{EF}P$	$\mapsto$	$\mathbf{AG}\neg P$			
$\neg \mathbf{EG}P$	$\mapsto$	$\mathbf{AF}\neg P$			
$\neg \mathbf{AF}P$	$\mapsto$	$\mathbf{EG}\neg P$			
$\neg \mathbf{AX}P$	$\mapsto$	$\mathbf{EX}\neg P$			
$\neg \mathbf{EX}P$	$\mapsto$	$\mathbf{AX}\neg P$			

Huom! Lyhennysmerkinnät:

$\mathbf{A}(P\mathbf{B}Q):\quad \neg\mathbf{E}((\neg P)\mathbf{U}Q)$

$\mathbf{E}(P\mathbf{B}Q):\quad \neg\mathbf{A}((\neg P)\mathbf{U}Q)$

Esimerkki

Haetaan muunnossäännöillä positiivinen normaalimuoto $\sim\mathbf{AG}(R \rightarrow (\neg Q \wedge \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)))$:

$$
\begin{aligned}
& \neg\mathbf{AG}(R \rightarrow (\neg Q \wedge \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q))) \\
\mapsto\ & \mathbf{EF}\neg(\neg R \vee (\neg Q \wedge \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q))) \\
\mapsto\ & \mathbf{EF}(R \wedge \neg(\neg Q \wedge \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q))) \\
\mapsto\ & \mathbf{EF}(R \wedge (Q \vee \neg\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q))) \\
\mapsto\ & \mathbf{EF}(R \wedge (Q \vee \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)))
\end{aligned}
$$

Alustavan taulun T_0 muodostaminen

- Aloitetaan OR-solmusta $D_0 = \{P\}$.
- OR-solmun D seuraajat ovat AND-solmuja C, jotka saadaan soveltamalla α/β-*sääntöjä* solmuun D.
- AND-solmun C seuraajat ovat OR-solmuja D, jotka saadaan *seuraajasäännöllä* solmusta C.

Huom. Jos OR-solmun D seuraaja (lausejoukko) C esiintyy jo taulussa, ei tauluun tule toista kopiota, vaan D:n seuraajaksi tulee jo olemassa oleva solmu C (vastaavasti AND-solmuille).

$\Longrightarrow$ Taulu muodostuu äärelliseksi.

OR-solmun seuraajat

Kukin OR-solmun D seuraaja C on pienin joukko lauseita siten, että $D \subseteq C$ ja C on suljettu alaspäin seuraavien α- ja β-sääntöjen suhteen:

1. Jos $\alpha \in C$, niin $\alpha_1 \in C$ ja $\alpha_2 \in C$.
2. Jos $\beta \in C$, niin $\beta_1 \in C$ tai $\beta_2 \in C$.

α-säännöt:

$$
\frac{P \wedge Q}{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}} \qquad \frac{\mathbf{AG}P}{\begin{array}{c} P \\ \mathbf{AXAG}P \end{array}} \qquad \frac{\mathbf{EG}P}{\begin{array}{c} P \\ \mathbf{EXEG}P \end{array}}
$$

OR-solmun seuraajat (jatkoa)

$$\frac{\mathbf{A}(P\mathbf{B}Q)}{\sim Q \qquad P \vee \mathbf{AXA}(P\mathbf{B}Q)} \qquad \frac{\mathbf{E}(P\mathbf{B}Q)}{\sim Q \qquad P \vee \mathbf{EXE}(P\mathbf{B}Q)}$$

β-säännöt:

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q} \qquad \frac{\mathbf{AF}P}{P \mid \mathbf{AXAF}P} \qquad \frac{\mathbf{EF}P}{P \mid \mathbf{EXEF}P}$$

$$\frac{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)}{Q \mid P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)} \qquad \frac{\mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)}{Q \mid P \wedge \mathbf{EXE}(P\mathbf{U}Q)}$$

Huom. Literaaleille sekä muotoa $\mathbf{AX}P$ ja $\mathbf{EX}P$ oleville lauseille ei ole sääntöjä (seuraajan C laajentaminen päättyy tällaisiin lauseisiin).

Esimerkki

Joukosta $D = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R)\}$ saatavat alaspäin suljetut joukot:

$C_1 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R), \mathbf{EF}((P \wedge Q) \vee R), (P \wedge Q) \vee R, P \wedge Q, P, Q\}$

$C_2 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R), \mathbf{EF}((P \wedge Q) \vee R), (P \wedge Q) \vee R, R\}$

$C_3 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R), \mathbf{EF}((P \wedge Q) \vee R), \mathbf{EXEF}((P \wedge Q) \vee R)\}$

$C_4 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R), \mathbf{AXAFEF}((P \wedge Q) \vee R)\}$

Huom. Alaspäin suljetut joukot voidaan rakentaa lauselogiikan taulumenetelmän tapaan. Kukin taulun haara vastaa yhtä joukkoa.

AND-solmun seuraajat

AND-solmun C seuraajat saadaan *seuraajasäännöllä*:

- Jos joukossa C on seuraajatilalauseet

  $$\mathbf{AX}P_1, \ldots, \mathbf{AX}P_l \text{ ja } \mathbf{EX}Q_1, \ldots, \mathbf{EX}Q_k,$$

  niin solmulla C on seuraajat

  $$D_1 = \{P_1, \ldots, P_l, Q_1\}, \ldots, D_k = \{P_1, \ldots, P_l, Q_k\}.$$

- Jos joukossa C ei ole muotoa $\mathbf{EX}Q_i$ olevia lauseita, joukolla on yksi seuraaja $\{P_1, \ldots, P_l\}$. Huom! Seuraajia on ainakin yksi.

Esimerkki. Solmun

$$C = \{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{EG}P, P, \mathbf{EXEG}P, \mathbf{EF}Q, \mathbf{EXEF}Q\}.$$

seuraajat ovat $D_1 = \{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{EG}P\}$ ja $D_2 = \{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{EF}Q\}$.

Karsintasäännöt

Alustavasta taulusta T_0 saadaan lopullinen taulu suorittamalla karsintaa seuraavilla säännöillä, kunnes mitään niistä ei voida soveltaa.

- Poistetaan AND-solmu, joka sisältää lauseen ja sen negaation.
- Poistetaan AND-solmu, jos yksikin sen alkuperäisistä seuraajista on poistettu.
- Poistetaan OR-solmu, jos kaikki sen alkuperäisistä seuraajista on poistettu.
- Poistetaan AND-solmu, jos jokin sen **tulevaisuuslause** ei toteudu tämän hetkisessä taulussa (mallintarkastus).

Tulevaisuuslauseita ovat seuraavaa muotoa olevat lauseet:

$$\mathbf{E}(P\mathbf{U}Q),\ \mathbf{EF}Q,\ \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q) \text{ ja } \mathbf{AF}Q.$$

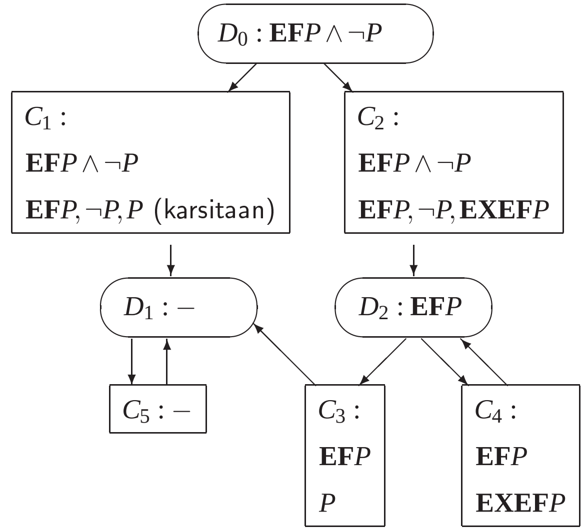
Tulevaisuuslauseiden toteutuminen

- Tulevaisuuslause $\mathbf{EF}Q$ ($\mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)$) toteutuu AND-solmussa C, joss taulusta löytyy solmusta C lähtevä polku AND-solmuun C', jossa on lause Q (ja polun kaikissa muissa AND-solmuissa on lause P).
- Tulevaisuuslause $\mathbf{AF}Q$ ($\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$) toteutuu AND-solmussa C, joss taulusta löytyy asyklinen aligraafi, jolle pätee seuraavat:
  (i) Aligraafin juuri on solmu C.
  (ii) Kullekin OR-sisäsolmulle täsmälleen yksi sen AND-seuraajasolmu on aligraafissa.
  (iii) Kullekin AND-sisäsolmulle kaikki sen OR-seuraajasolmut ovat mukana aligraafissa.
  (iv) Kaikissa aligraafin lehtisolmuissa on lause Q (ja kaikissa muissa AND-solmuissa P).

Esimerkki

- Solmun $D_0 = \{\mathbf{EF}P \wedge \neg P\}$ AND-seuraajat ovat $C_1 = \{\mathbf{EF}P \wedge \neg P, \mathbf{EF}P, \neg P, P\}$ ja $C_2 = \{\mathbf{EF}P \wedge \neg P, \mathbf{EF}P, \neg P, \mathbf{EXEF}P\}$.
- C_1:n OR-seuraajat (vähintään yksi): $D_1 = \{\}$.
  C_2:n OR-seuraajat: $D_2 = \{\mathbf{EF}P\}$.
- D_2:n AND-seuraajat: $C_3 = \{\mathbf{EF}P, P\}$ ja $C_4 = \{\mathbf{EF}P, \mathbf{EXEF}P\}$.
  D_1:n AND-seuraajat: $C_5 = \{\}$.
- C_3:n ja C_5:n OR-seuraajat: $\{\} = D_1$.
  C_4:n OR-seuraajat: $\{\mathbf{EF}P\} = D_2$.
- Alustava taulu T_0 on valmis.
- Karsinta: Poistetaan C_1 (lause ja negaatio). Lopullinen taulu T_1 valmis (tulevaisuuslause $\mathbf{EF}P$ toteutuu AND-solmuissa C_2, C_3, C_4).

Taulun graafiesitys



2. Toteutuvuuden ja pätevyyden tutkiminen

- CTL-lauseen P lopullisesta taulusta T_1 voidaan muodostaa lauseelle malli, mikäli lause on toteutuva.
- CTL-lauseen P pätevyyttä voidaan tutkia lauseen $\sim P$ toteutumattomuuden kautta.
- LTL-lauseen P toteutuvuus/pätevyys voidaan palauttaa vastaavan CTL-lauseen toteutuvuuteen/pätevyyteen.

Teoreema. Olkoon CTL-lause P positiivisessa normaalimuodossa. Tällöin P on toteutuva joss lopullisessa taulussa T_1 on AND-solmu, joka sisältää lauseen P.

CTL-toteutuvuus tauluilla

CTL-taulu antaa lauseen P mallin:

- Mallin tilat vastaavat AND-solmuja ja valuaatio saadaan suoraan AND-solmun sisältämistä atomilauseista.
- Mallissa on oltava ainakin yksi AND-solmu, johon sisältyy P.
- Seuraajat on valittava siten, että malli on sarjallinen ja kaikkien mukaan tulevien AND-solmujen tulevaisuuslauseet toteutuvat.

Huom. Taulumenetelmää voidaan käyttää ohjelmasynteesissä (muodostamaan järjestelmän ohjausrakenne):

(i) Annetaan ohjelman määrittely CTL-lauseina.

(ii) Haetaan määrittelylle malli (antaa ohjausrakenteen).

Esimerkki

Anna CTL-lauseelle $\mathbf{EF}P \wedge \neg P$ voidaan muodosta malli $\langle S, R, v\rangle$ edellä annetusta taulusta T_1 esim. seuraavasti:

- Asetetaan $S = \{C_2, C_3, C_5\}$, $R = \{\langle C_2, C_3\rangle, \langle C_3, C_5\rangle, \langle C_5, C_5\rangle\}$ sekä $v(P, s) = \text{true}$, jos $s = C_3$, ja muutoin $v(P, s) = \text{false}$.
- Toinen vaihtoehto: $S = \{C_2, C_3, C_4, C_5\}$,
  $R = \{\langle C_2, C_4\rangle, \langle C_4, C_3\rangle, \langle C_3, C_5\rangle, \langle C_5, C_5\rangle\}$
  sekä $v(P, s) = \text{true}$, jos $s = C_3$, ja muutoin $v(P, s) = \text{false}$.

Huom. Esimerkiksi malli, jossa

$$S = \{C_2, C_4\},\ R = \{\langle C_2, C_4\rangle, \langle C_4, C_4\rangle\} \text{ ja } v(P, C_2) = v(P, C_4) = \text{false}$$

ei kelpaa, koska solmujen C_2 ja C_4 tulevaisuuslause $\mathbf{EF}P$ ei toteudu.

CTL-pätevyys tauluilla

- Lause P on pätevä, joss sen negaatio $\neg P$ ei ole toteutuva.
- Toteutuvuus voidaan selvittää taulumenetelmällä:
  (i) Muodostetaan lauseen $\neg\varphi$ positiivinen normaalimuoto $\sim\varphi$.
  (ii) Rakennetaan taulu lauseelle $\sim\varphi$.
- Lause φ on pätevä, joss $\sim\varphi$ ei ole toteutuva, joss lopullisessa taulussa T_1 ei ole yhtään AND-solmua, joka sisältää lauseen $\sim\varphi$.

Esimerkki

Onko CTL-lause

$$\varphi = \mathbf{EX}(P \vee Q) \rightarrow (\mathbf{EX}P \vee \mathbf{EX}Q)$$

pätevä?

Haetaan lauseelle $\neg\varphi$ positiivinen normaalimuoto $\sim\varphi$:

$\neg(\mathbf{EX}(P \vee Q) \rightarrow (\mathbf{EX}P \vee \mathbf{EX}Q)$

$\mapsto\quad \mathbf{EX}(P \vee Q) \wedge \neg(\mathbf{EX}P \vee \mathbf{EX}Q)$

$\mapsto\quad \mathbf{EX}(P \vee Q) \wedge (\neg\mathbf{EX}P \wedge \neg\mathbf{EX}Q)$

$\mapsto\quad \mathbf{EX}(P \vee Q) \wedge (\mathbf{AX}\neg P \wedge \mathbf{AX}\neg Q)$

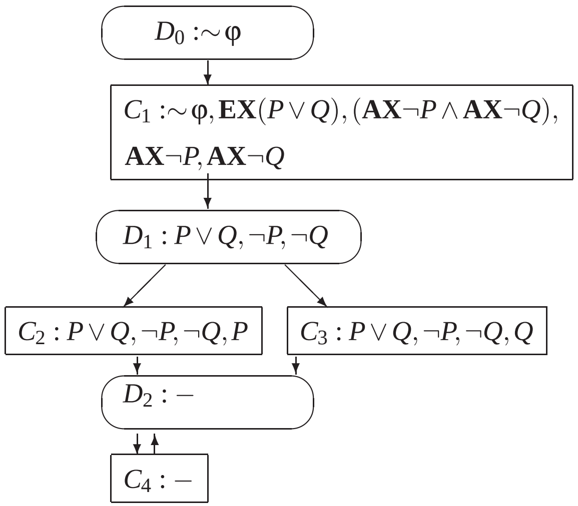
Siis $\sim\varphi = \mathbf{EX}(P \vee Q) \wedge (\mathbf{AX}\neg P \wedge \mathbf{AX}\neg Q)$.

Esimerkki: AND- ja OR-seuraajat

- Solmun $D_0 = \{\sim\varphi\}$ AND-seuraajat:
  $C_1 = \{\sim\varphi, \mathbf{EX}(P \vee Q), (\mathbf{AX}\neg P \wedge \mathbf{AX}\neg Q), \mathbf{AX}\neg P, \mathbf{AX}\neg Q\}$.
- C_1:n OR-seuraajat:
  $D_1 = \{P \vee Q, \neg P, \neg Q\}$.
- D_1:n AND-seuraajat:
  $C_2 = D_1 \cup \{P\}$ ja $C_3 = D_1 \cup \{Q\}$.
- C_2:n OR-seuraajat: $D_3 = \{\}$.
  C_3:n OR-seuraajat: $\{\} = D_3$.
  D_3:n AND-seuraajat: $C_4 = \{\}$.
  C_4:n OR-seuraajat: $\{\} = D_3$.

$\Longrightarrow$ Alustava taulu T_0 on valmis.

Esimerkki: alustava taulu



Esimerkki: karsinta

1. Solmut C_2 ja C_3 voidaan poistaa, koska ne sisältävät lauseen ja sen negaation.
2. OR-solmu D_1 voidaan poistaa (kaikki seuraajat poistettu).
3. AND-solmu C_1 voidaan poistaa (seuraaja poistettu).
4. OR-solmu D_0 voidaan poistaa (kaikki seuraajat poistettu).

$\Longrightarrow$ Lopullinen taulu T_1 on valmis.

Taulussa T_1 ei ole AND-solmua, jossa esiintyy $\sim\varphi$, joten $\sim\varphi$ ei ole toteutuva ja φ on pätevä.

LTL-toteutuvuus tauluilla

- CTL-taulut antavat menetelmän myös LTL-toteutuvuuden tarkastamiseen.

Teoreema. Olkoon LTL-lause P positiivisessa normaalimuodossa ja CTL-lause P' saatu siitä korvaamalla operaattorit $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{B}$ systemaattisesti operaattoreilla $\mathbf{AF}, \mathbf{AG}, \mathbf{AX}, \mathbf{AU}, \mathbf{AB}$.

Tällöin P on LTL-toteutuva joss P' on CTL-toteutuva.

Esimerkki. LTL-lause $\mathbf{G}(\neg P \mathbf{U} Q)$ on toteutuva, joss CTL-lause $\mathbf{AGA}(\neg P \mathbf{U} Q)$ on toteutuva.

3. Laskennallinen vaativuus (yhteenveto)

- CTL
  Mallintarkastus: $\mathbf{P}$-täydellinen, $O(|M| \cdot |P|)$
  Toteutuvuus: **EXPTIME**-täydellinen
- LTL
  Mallintarkastus: **PSPACE**-täydellinen, $O(|M| \cdot exp(|P|))$
  Toteutuvuus: **PSPACE**-täydellinen
- CTL*
  Mallintarkastus: **PSPACE**-täydellinen, $O(|M| \cdot exp(|P|))$
  Toteutuvuus: 2**EXPTIME**-täydellinen

Tehokkaasti toteutettavia aliluokkia

- Toteutuvuusongelma ratkeaa polynomisessa ajassa esim. ohjelmasynteesin kannalta mielenkiintoisissa tapauksissa.
- Esim. SCTL (yksinkertaistettu CTL), jossa pätee ESC-oletus eli tulevaisuuslauseet eivät riipu historiasta:
  $P_1 \vee \cdots \vee P_n$, $\mathbf{AG}(P_1 \vee \cdots \vee P_n)$
  $\mathbf{AG}(P_0 \rightarrow \mathbf{AF}(P_1 \vee \cdots \vee P_n))$,
  $\mathbf{AG}(P_0 \rightarrow \mathbf{A}(P_1 \vee \cdots \vee P_n \mathbf{U} Q_1 \vee \cdots \vee Q_m))$
  $\mathbf{AG}(P_0 \rightarrow \mathbf{AX}(P_1 \vee \cdots \vee P_n) \wedge \mathbf{EX}(Q_1 \vee \cdots \vee Q_m) \wedge \cdots \wedge \mathbf{EX}(R_1 \vee \cdots \vee R_l))$
- Esim. RLTL (rajoitettu LTL):
  $\mathbf{G}(P_1 \vee \cdots \vee P_n)$
  $\mathbf{G}(P_0 \rightarrow \mathbf{F}(P_1 \vee \cdots \vee P_n))$
  $\mathbf{G}(P_0 \rightarrow \mathbf{X}(P_1 \vee \cdots \vee P_n))$