T-79.5101 **kevät 2006**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 1
Ratkaisut

1. a) Jos φ on tosi, niin agentti tietää φ:n.

   b) Jos agentti ei tiedä φ:tä, niin agentti tietää, että se ei tiedä φ:tä.

   c) Jos agentti tietää, että φ:stä seuraa ψ, niin silloin, jos agentti tietää φ:n, niin agentti tietää ψ:n.

   d) Agentti tietää, että φ on tosi tai agentti tietää, että φ ei ole tosi: toisin sanoen agentti tietää, *onko* φ tosi.

2. a) $\varphi \to LK\varphi$

   b) $L\varphi \land L\psi \to L(\varphi \land \psi)$

   c) $K\varphi \to L\varphi$

   d) $LL\varphi \to L\varphi$

3. Olkoon $P =$ ”ulkona sataa”.

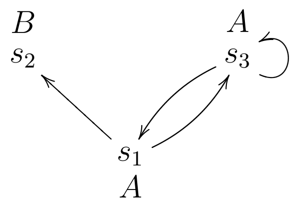
   a) $K_aK_bP \land \neg K_bK_aK_bP$

   b) $K_a(\neg K_bP \land \neg K_b\neg P)$

   c) $K_b(K_aP \lor K_a\neg P)$

   d) $\neg K_aK_bK_aP \land \neg K_a\neg K_bK_aP$

4. Tehtävässä annettu malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ on



   a) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box A$ ei päde, koska $\langle s_1, s_2\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s_2 \nVdash A$.

   b) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond B \to \Box\Diamond\top$ pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_1 \nVdash \Diamond B \quad \text{tai} \quad \mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box\Diamond\top$$

pätee. Koska $\langle s_1, s_2\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s_2 \Vdash B$, ei $\mathcal{M}, s_1 \nVdash \Diamond B$ päde. $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box\Diamond\top$ pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Diamond\top \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Diamond\top$$

pätevät. Koska ei kuitenkaan ole olemassa maailmaa $s \in S$ siten, että $\langle s_2, s\rangle \in R$, seuraa, että $\mathcal{M}, s_2 \nVdash \Diamond\top$, ja edelleen, että $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box\Diamond\top$ ja $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond B \to \Box\Diamond\top$ eivät päde.

c) $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Diamond\Diamond\Box\bot$ pätee, joss $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond\Box\bot$ tai $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Diamond\Box\bot$ pätee. $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond\Box\bot$ puolestaan pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box\bot \quad \text{tai} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\bot.$$

Koska ei ole olemassa maailmaa $s \in S$, jolle $\langle s_2, s\rangle \in R$, seuraa, että $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box\bot$ pätee. Siten myös $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond\Box\bot$ ja edelleen $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Diamond\Diamond\Box\bot$ pätevät.

d) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box(B \vee \Box\Diamond A)$ pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_2 \Vdash B \vee \Box\Diamond A \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash B \vee \Box\Diamond A$$

pätevät. $\mathcal{M}, s_2 \Vdash B \vee \Box\Diamond A$ pätee, koska $\mathcal{M}, s_2 \Vdash B$. $\mathcal{M}, s_3 \Vdash B \vee \Box\Diamond A$ pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_3 \Vdash B \quad \text{tai} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Diamond A.$$

$\mathcal{M}, s_3 \Vdash B$ ei toteudu, koska $v(s_3, B) = \text{false}$. Nyt $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Diamond A$, joss $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond A$ ja $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Diamond A$ pätevät. Näin myös on, koska $\langle s_1, s_3\rangle \in R$, (esim.) $\langle s_3, s_3\rangle \in R$ ja $v(s_3, A) = \text{true}$. Siten $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Diamond A$ ja $\mathcal{M}, s_3 \Vdash B \vee \Box\Diamond A$ pätevät. Seuraa siis, että myös $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box(B \vee \Box\Diamond A)$ pätee.

e) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond(\Box A \wedge \Box\neg A)$ pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box A \wedge \Box\neg A \quad \text{tai} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box A \wedge \Box\neg A.$$

Nähdään, että $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box A \wedge \Box\neg A$ pätee, koska sekä $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box A$ että $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box\neg A$, mikä seuraa siitä, että ei ole olemassa maailmaa $s \in S$ siten, että $\langle s_2, s\rangle \in R$.

5. Tehtävässä annettu malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ on

$$\begin{tikzcd}
 & A\ s_1 \arrow[loop above] \arrow[r, bend right] \arrow[dl] \arrow[d] & s_4\ A \arrow[l, bend right] \arrow[d] \\
s_2 \arrow[r] & s_3 \arrow[r] & s_5\ A \arrow[ll, bend left] \arrow[loop below]
\end{tikzcd}$$

Tässä tehtävässä voitaisiin lauseen $\Box\Diamond\Box\Diamond A$ totuusarvot eri maailmoissa määrittää suoraan modaalilogiikan operaattorien $\Box$ ja $\Diamond$ määritelmiä hyväksi käyttäen kuten edellisessä tehtävässä. Voitaisiin siis esimerkiksi tutkia järjestyksessä, päteekö $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box\Diamond\Box\Diamond A$, $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box\Diamond\Box\Diamond A$ jne., kunnes löydetään maailma, jossa annettu modaalilogiikan lause pätee.

Vaihtoehtoisesti voidaan kuitenkin lähteä liikkeelle annetun lauseen pienimmistä alilauseista (tässä tapauksessa atomilause A) ja johtaa niiden totuusarvojen sekä modaalioperaattorien määritelmien avulla joidenkin suurempien alilauseiden totuusarvot *kaikissa* mallin maailmoissa. Tätä voidaan toistaa järjestyksessä yhä suuremmille alilauseille, kunnes lopulta saadaan selville mallin kaikki maailmat, joissa lause $\Box\Diamond\Box\Diamond A$ pätee. Vastaukseksi voidaan valita silloin jokin näistä maailmoista.

Koska $v(s_1, A) = v(s_4, A) = v(s_5, A) = \text{true}$ ja muutoin $v(s, A) = \text{false}$, nähdään, että

$$\mathcal{M}, s_1 \Vdash A, \quad \mathcal{M}, s_4 \Vdash A \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_5 \Vdash A$$

(ja muulloin $\mathcal{M}, s \nVdash A$). Koska nyt esim. $\langle s_1, s_4\rangle \in R$, $\langle s_3, s_5\rangle \in R$, $\langle s_4, s_1\rangle \in R$ ja $\langle s_5, s_5\rangle \in R$, seuraa modaalioperaattorin $\Diamond$ semantiikasta, että

$$\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond A, \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Diamond A, \quad \mathcal{M}, s_4 \Vdash \Diamond A \text{ ja } \mathcal{M}, s_5 \Vdash \Diamond A$$

pätevät. Sen sijaan $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Diamond A$ ei ole voimassa, koska maailmalla s_2 on ainoana seuraajanaan R-relaatiossa maailma s_3, mutta $\mathcal{M}, s_3 \nVdash A$.

Modaalioperaattorin $\Box$ semantiikan määritelmän avulla päätellään, että

$$\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box\Diamond A, \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Diamond A \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_4 \Vdash \Box\Diamond A,$$

sillä kunkin maailman s_2, s_3 ja s_4 kaikille R-relaation seuraajamaailmoille s' pätee $\mathcal{M}, s' \Vdash \Diamond A$. Todetaan lisäksi, että nämä ovat mallin *ainoat* maailmat, joissa lause $\Box\Diamond A$ pätee. (Lause $\Box\Diamond A$ ei päde maailmoissa s_1 ja s_5, sillä näillä maailmoilla on R-relaatiossa seuraajana maailma s_2, jolle $\mathcal{M}, s_2 \nVdash \Diamond A$.)

Soveltamalla jälleen modaalioperaattorin $\Diamond$ semantiikan määritelmää todetaan, että

$$\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond\Box\Diamond A, \quad \mathcal{M}, s_2 \Vdash \Diamond\Box\Diamond A \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_5 \Vdash \Diamond\Box\Diamond A,$$

sillä kullakin maailmoista s_1, s_2 ja s_5 on seuraajamaailma, jossa $\Box\Diamond A$ pätee (koska edellisen perusteella $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box\Diamond A$ ja $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Diamond A$, ja esim. $\langle s_1, s_2\rangle \in R$, $\langle s_2, s_3\rangle \in R$ ja $\langle s_5, s_2\rangle \in R$). Nähdään myös, että lause $\Diamond\Box\Diamond A$ ei päde maailmassa s_3 (koska s_3:n ainoa seuraaja R-relaatiossa on s_5, mutta $\mathcal{M}, s_5 \nVdash \Box\Diamond A$) eikä maailmassa s_4 (koska $\mathcal{M}, s_1 \nVdash \Box\Diamond A$ ja $\mathcal{M}, s_5 \nVdash \Box\Diamond A$, eikä s_4:llä ole muita seuraajia relaatiossa R).

Operaattorin $\Box$ semantiikan avulla todetaan lopulta, että

$$\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Diamond\Box\Diamond A, \quad \mathcal{M}, s_4 \Vdash \Box\Diamond\Box\Diamond A \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_5 \Vdash \Box\Diamond\Box\Diamond A$$

pätevät, sillä kaikille maailmojen s_3, s_4 ja s_5 R-seuraajille s' pätee $\mathcal{M}, s' \Vdash \Diamond\Box\Diamond A$. Havaitaan lisäksi, että s_3, s_4 ja s_5 ovat ainoat tehtävän lauseen toteuttavat maailmat. Näistä siis mikä tahansa voidaan valita tehtävän vastaukseksi.

Huomaa, että jokaisessa vaiheessa on tärkeää etsiä *kaikki* ne mallin maailmat, jossa ko. vaiheessa tutkittavana oleva alilause pätee, sillä muuten voidaan päätyä tilanteeseen, jossa jonkin muun alilauseen totuusarvoa ei voidakaan päätellä aiemmin laskettujen tulosten perusteella suoraan.

Jos esimerkiksi todettaisiin pelkästään, että $\mathcal{M}, s_5 \Vdash A$ ja $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Diamond A$ (koska $\langle s_3, s_5\rangle \in R$), ei nyt ainoastaan tämän tiedon avulla voida päätellä esim. alilauseen $\Box\Diamond A$ totuusarvoa s_4:ssä, sillä se riippuu myös lauseen $\Diamond A$ totuusarvoista s_1:ssä ja s_5:ssä, jotka on s_4:n seuraajia. (Erityisesti olisi nyt *virhe* olettaa, että esim. $\mathcal{M}, s_4 \nVdash \Box\Diamond A$ olisi voimassa; kuten yllä todettiin, lause $\Box\Diamond A$ itse asiassa pätee maailmassa s_4.)