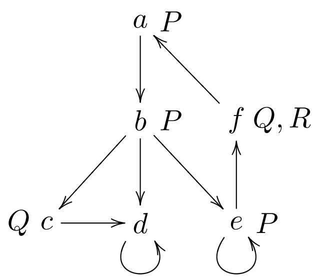
T-79.5101 **kevät 2006**

Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 10
Ratkaisut

1. $\mathcal{M}$:



a) $\mathcal{M}, a \not\models \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$, sillä (esim.) $(a, b, d, d, d, \ldots)$ on tilasta a alkava täysi polku, joka ei kulje sellaisen tilan $s \in S$ kautta, jolle pätisi $\mathcal{M}, s \models Q$.

b) Mallin F-reiluja polkuja ovat kaikki ne täydet polut, jotka kaikille lauseille $\varphi \in F$ sisältävät äärettömän monta tilaa $s \in S$ siten, että $\mathcal{M}, s \models \varphi$. Koska $F = \{R\}$, rajoitutaan siis tarkastelemaan sellaisia polkuja, jotka sisältävät äärettömän monta tilaa $s \in S$, joille $\mathcal{M}, s \models R$.

Koska $\{s \in S \mid \mathcal{M}, s \models R\} = \{f\}$, seuraa, että kaikkien mallin F-reilujen polkujen tulee kulkea äärettömän monta kertaa tilan f kautta. Koska tiloista c ja d ei ole yhteyttä tilaan f, mikään F-reilu polku ei voi kulkea näiden tilojen kautta. Siten mallin jokainen F-reilu polku on muotoa

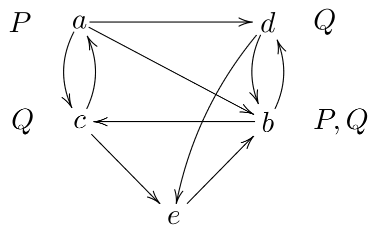
$$(a, b, \underbrace{e, \ldots, e}_{n_1 \text{ kpl}}, f, a, b, \underbrace{e, \ldots, e}_{n_2 \text{ kpl}}, f, a, b, \underbrace{e, \ldots, e}_{n_3 \text{ kpl}}, f, \ldots)$$

missä $n_1, n_2, n_3, \ldots$ ovat (äärellisiä) positiivisia kokonaislukuja. Koska erityisesti n_1 on äärellinen ja $\mathcal{M}, a \models P$, $\mathcal{M}, b \models P$, $\mathcal{M}, e \models P$ sekä $\mathcal{M}, f \models Q$, seuraa, että $\mathcal{M}, a \models_F \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$ pätee.

c) $\mathcal{M}, a \models \mathbf{EG}P$, sillä $(a, b, e, e, e, \ldots)$, on tilasta a alkava täysi polku, jonka jokaisessa tilassa $s \in \{a, b, e\}$ pätee $\mathcal{M}, s \models P$.

d) Huomataan, että c-kohdan polku on mallin ainoa tilasta a alkava täysi polku, jonka kaikissa tiloissa lause P pätee. Tämä polku ei kuitenkaan ole F-reilu, sillä se ei kulje kertaakaan tilan f kautta. Siten $\mathcal{M}, a \not\models_F \mathbf{EG}P$.

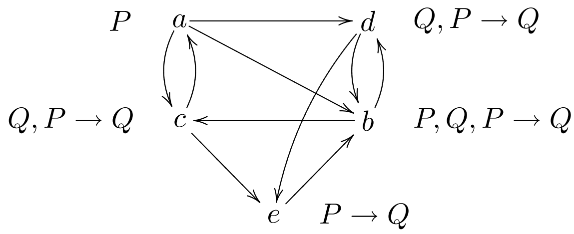
2. $\mathcal{M}$:



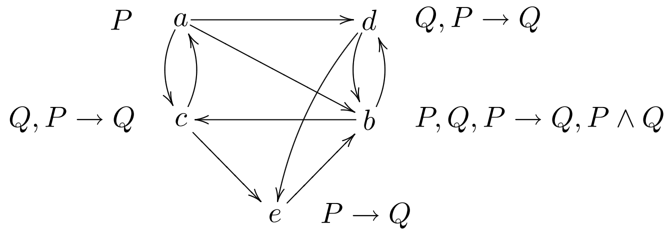
Järjestetään lauseen $\mathbf{AXE}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big)$ alilauseet järjestykseen, jonka avulla alilauseiden totuusarvo mallin eri tiloissa voidaan määrittää vaiheittain aiemmin käsiteltyjen alilauseiden totuusarvojen perusteella, kunnes saadaan lopulta selville koko lauseen totuusarvo mallin eri tiloissa. Alilauseet voidaan käsitellä esimerkiksi järjestyksessä

$$P, Q, P \to Q, P \wedge Q, \mathbf{E}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big), \mathbf{AXE}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big).$$

Lauseiden P ja Q totuusarvot saadaan suoraan valuaatiosta v. Lasketaan alilauseen $P \to Q$ totuusarvot mallin eri tiloissa:



Alilause $P \wedge Q$:



Lasketaan alilauseen $\mathbf{E}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big)$ totuusarvot luentokalvoissa esitetyn CheckEU-algoritmin avulla. Aloitetaan siis tilajoukosta, jossa alilause $P \wedge Q$ on tosi ($\{b\}$) ja merkitään $\mathbf{E}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big)$ todeksi tilassa b. Kerätään tämän jälkeen kaikki ne tilat $s \in S$, joille $\langle s, b\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s \models P \to Q$ (ja joihin lause $\mathbf{E}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big)$

ei ole vielä merkitty todeksi). Saadaan tilajoukko $\{d, e\}$, jonka kaikkiin tiloihin merkitään lause $\mathbf{E}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big)$ todeksi. Toistetaan nyt menettely tilajoukon tilojen d ja e edeltäjille ja edelleen niiden edeltäjille niin kauan, kunnes tulosjoukko ei enää kasva. Koko algoritmin suoritus voidaan siis esittää seuraavasti:

Kierros	Tulosjoukko	Käsiteltävänä oleva tilajoukko	Tulosjoukkoon lisättävät tilat
1	$\{b\}$	$\{b\}$	$\{d, e\}$
2	$\{b, d, e\}$	$\{d, e\}$	$\{c\}$
3	$\{b, c, d, e\}$	$\{c\}$	$\emptyset$

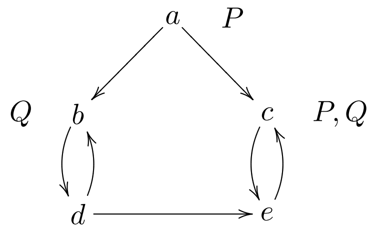
Alilause $\mathbf{E}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big)$ pätee siis tiloissa

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[rr] \arrow[d, bend right] \arrow[drr] & & d \arrow[d, bend right] \arrow[ddl, bend right] & \mathbf{E}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big) \\
\mathbf{E}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big) & c \arrow[u, bend right] \arrow[dr] & & b \arrow[u, bend right] \arrow[ll] & \mathbf{E}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big) \\
 & & e \arrow[ur] & \mathbf{E}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big) &
\end{tikzcd}$$

Lasketaan viimein lauseen $\mathbf{AXE}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big)$ totuusarvot keräämällä kaikki ne mallin tilat, joiden kaikille R-relaation seuraajatiloille pätee $\mathbf{E}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big)$. Lopputulos on siten

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{AXE}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big) & a \arrow[rr] \arrow[d, bend right] \arrow[drr] & & d \arrow[d, bend right] \arrow[ddl, bend right] & \mathbf{AXE}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big) \\
 & c \arrow[u, bend right] \arrow[dr] & & b \arrow[u, bend right] \arrow[ll] & \mathbf{AXE}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big) \\
 & & e \arrow[ur] & \mathbf{AXE}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big) &
\end{tikzcd}$$

3. $\mathcal{M}$:



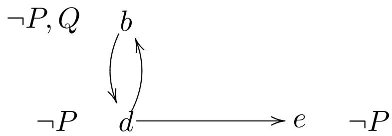
Esitetään lause ensin **EU**- ja **EG**-operaattoreiden avulla:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{AG}\big(Q \to \mathbf{A}(\mathbf{EF}P\mathbf{U}\mathbf{AF}P)\big)\\
\equiv\ &\mathbf{AG}\big(Q \to \mathbf{A}(\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P)\mathbf{U}\neg\mathbf{EG}\neg P)\big)\\
\equiv\ &\mathbf{AG}\big(Q \to \neg\mathbf{E}\big((\neg\neg\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \neg\neg\mathbf{EG}\neg P)\big) \wedge \neg\mathbf{EG}\neg\neg\mathbf{EG}\neg P\big)\\
\equiv\ &\mathbf{AG}\big(Q \to \neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big) \wedge \neg\mathbf{EGEG}\neg P\big)\\
\equiv\ &\neg\mathbf{EF}\neg\big(Q \to \neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big) \wedge \neg\mathbf{EGEG}\neg P\big)\\
\equiv\ &\neg\mathbf{E}\big(\top\mathbf{U}\neg\big(Q \to \neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big) \wedge \neg\mathbf{EGEG}\neg P\big)\big)
\end{aligned}
$$

Järjestetään alilauseet sopivaan laskentajärjestykseen, esim.

$$
\begin{gathered}
P, Q, \neg P, \mathbf{EG}\neg P, \mathbf{EGEG}\neg P, \neg\mathbf{EGEG}\neg P,\\
\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P), \neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P), \neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P,\\
\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big), \neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big),\\
\neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big) \wedge \neg\mathbf{EGEG}\neg P,\\
Q \to \neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big) \wedge \neg\mathbf{EGEG}\neg P,\\
\neg\big(Q \to \neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big) \wedge \neg\mathbf{EGEG}\neg P\big),\\
\mathbf{E}\big(\top\mathbf{U}\neg\big(Q \to \neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big) \wedge \neg\mathbf{EGEG}\neg P\big)\big),\\
\neg\mathbf{E}\big(\top\mathbf{U}\neg\big(Q \to \neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big) \wedge \neg\mathbf{EGEG}\neg P\big)\big)
\end{gathered}
$$

Koska P pätee tiloissa a ja c, niin $\neg P$ pätee tiloissa $\{b, d, e\}$. Nyt lauseen $\mathbf{EG}\neg P$ totuusarvo voidaan laskea luentokalvoilla esitetyn $\mathsf{CheckEG}$-algoritmin avulla. Muodostetaan siis ensin mallin $\mathcal{M}$ rajoittuma $\mathcal{M}'$ niihin tiloihin, joissa $\neg P$ pätee:



Etsitään seuraavaksi mallin $\mathcal{M}'$ ei-triviaalit vahvasti kytketyt komponentit[1] ja merkitään lause $\mathbf{EG}\neg P$ todeksi kaikissa näihin komponentteihin kuuluvissa tiloissa. Kerätään sitten (samalla tavoin kuin

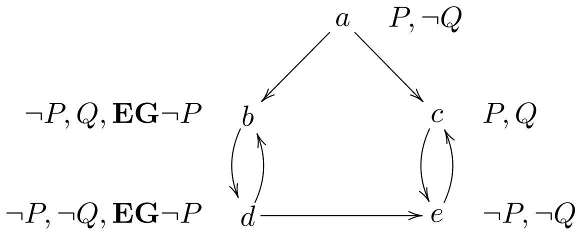
[1]Yleisesti: Mallin $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ tilojen ei-tyhjä osajoukko $\emptyset \subset C \subseteq S$ on $\mathcal{M}$:n ei-triviaali vahvasti kytketty komponentti, jos mitkä tahansa kaksi tilaa $x, y \in C$ ovat $\mathcal{M}$:ssä saavutettavissa toisistaan joitakin vähintään yhden R:n kaaren sisältäviä polkuja pitkin, eikä ole olemassa tiloja $z \in C$, $w \in S \setminus C$ siten, että z ja w olisivat saavutettavissa $\mathcal{M}$:ssä toisistaan tällaisia polkuja pitkin.

CheckEU-algoritmissa) vaiheittain kaikki ne tilat, jotka ovat jonkin näihin komponentteihin kuuluvan tilan edeltäjiä mallissa $\mathcal{M}'$, merkitään lause todeksi myös näissä tiloissa ja toistetaan tarkastelu kaikille näille tiloille niin kauan, kunnes ei enää saada uusia tiloja, joissa lause ei jo olisi tosi.

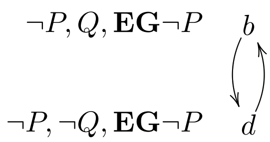
Ainoa $\mathcal{M}'$:n ei-triviaali vahvasti kytketty komponentti on $\{b, d\}$. Koska tila e ei ole kummankaan tilan edeltäjä $\mathcal{M}'$:ssa, CheckEG-algoritmi pysähtyy heti ensimmäisen kierroksen jälkeen:

Kierros	Tulosjoukko	Käsiteltävänä oleva tilajoukko	Tulosjoukkoon lisättävät tilat
1	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$	$\emptyset$

On siis saatu tulos



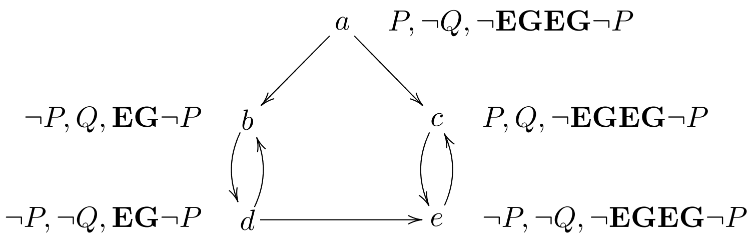
Lasketaan seuraavaksi lauseen $\mathbf{EGEG}\neg P$ totuusarvot käyttämällä uudelleen CheckEG-algoritmia. Muodostetaan siis mallin $\mathcal{M}$ rajoittuma $\mathcal{M}''$ niihin tiloihin, joissa $\mathbf{EG}\neg P$ pätee:



Ainoa mallin $\mathcal{M}''$ ei-triviaali vahvasti kytketty komponentti on $\{b, d\}$. CheckEG-algoritmi pysähtyy jälleen ensimmäisen kierroksen jälkeen:

Kierros	Tulosjoukko	Käsiteltävänä oleva tilajoukko	Tulosjoukkoon lisättävät tilat
1	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$	$\emptyset$

Lause $\mathbf{EGEG}\neg P$ pätee siis tiloissa b ja d, jolloin sen negaatio pätee tiloissa



Alilauseen $\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P)$ totuusarvo voidaan laskea CheckEU-algoritmin avulla:

Kierros	Tulosjoukko	Käsiteltävänä oleva tilajoukko	Tulosjoukkoon lisättävät tilat
1	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	$\{e\}$
2	$\{a, c, e\}$	$\{e\}$	$\{d\}$
3	$\{a, c, d, e\}$	$\{d\}$	$\{b\}$
4	$\{a, b, c, d, e\}$	$\{b\}$	$\emptyset$

Lause $\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P)$ pätee kaikissa mallin $\mathcal{M}$ tiloissa, joten lauseen negaatio $\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P)$ ei päde missään mallin tilassa. Tästä seuraa, ettei myöskään konjunktio $\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P$ toteudu missään mallin tilassa.

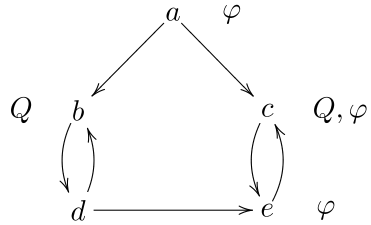
Sovelletaan sitten uudelleen CheckEU-algoritmia lauseeseen $\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P)\wedge\mathbf{EG}\neg P)\big)$. Algoritmi päättyy heti, sillä edellisen perusteella jo algoritmin lähtötilajoukko on tyhjä.

Kierros	Tulosjoukko	Käsiteltävänä oleva tilajoukko	Tulosjoukkoon lisättävät tilat
1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Lause $\neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big)$ pätee nyt mallin kaikissa tiloissa. Koska aiemmin todettiin, että lause $\neg\mathbf{EGEG}\neg P$ toteutuu tilajoukossa $\{a, c, e\}$, saadaan konjunktiolle

$$\varphi = \neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big) \wedge \neg\mathbf{EGEG}\neg P$$

tulos



(Yllä olevassa kuviossa on tiloihin merkitty enää vain ne alilauseet, joiden totuusarvoja tarvitaan vielä jäljellä olevien alilauseiden totuusarvojen laskemiseksi.)

Alilause $Q \to \varphi$:

$$\begin{tikzcd}
 & & a \arrow[dl] \arrow[dr] & \varphi, Q \to \varphi & \\
Q & b \arrow[d, bend right] & & c \arrow[d, bend right] & Q, \varphi, Q \to \varphi \\
Q \to \varphi & d \arrow[u, bend right] \arrow[rr] & & e \arrow[u, bend right] & \varphi, Q \to \varphi
\end{tikzcd}$$

Alilause $\neg(Q \to \varphi)$:

$$\begin{tikzcd}
 & & a \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\neg(Q \to \varphi) & b \arrow[d, bend right] & & c \arrow[d, bend right] \\
 & d \arrow[u, bend right] \arrow[rr] & & e \arrow[u, bend right]
\end{tikzcd}$$

Lasketaan lauseen $\mathbf{E}\big(\top \mathbf{U} \neg(Q \to \varphi)\big)$ totuusarvot $\mathsf{CheckEU}$-algoritmilla:

Kierros	Tulosjoukko	Käsiteltävänä oleva tilajoukko	Tulosjoukkoon lisättävät tilat
1	$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a, d\}$
2	$\{a, b, d\}$	$\{a, d\}$	$\emptyset$

$$\begin{tikzcd}
 & & a \arrow[dl] \arrow[dr] & \mathbf{E}\big(\top \mathbf{U} \neg(Q \to \varphi)\big) \\
\mathbf{E}\big(\top \mathbf{U} \neg(Q \to \varphi)\big) & b \arrow[d, bend right] & & c \arrow[d, bend right] \\
\mathbf{E}\big(\top \mathbf{U} \neg(Q \to \varphi)\big) & d \arrow[u, bend right] \arrow[rr] & & e \arrow[u, bend right]
\end{tikzcd}$$

Lopputulokseksi saadaan viimein

$$
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
b \arrow[d, bend right] & & c \arrow[d, bend right] & \neg\mathbf{E}\big(\top\mathbf{U}\neg(Q \to \varphi)\big) \\
d \arrow[u, bend right] \arrow[rr] & & e \arrow[u, bend right] & \neg\mathbf{E}\big(\top\mathbf{U}\neg(Q \to \varphi)\big)
\end{tikzcd}
$$