T-79.5101 **kevät 2006**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 7
Ratkaisut

1. **KB** on symmetristen kehysten joukko. Käännetään annettu lause predikaattilogiikkaan:

$$
\begin{aligned}
&\tau(\neg\Box\neg\Box\neg\Box\neg P \to \neg\Box\neg P, x)\\
&= \tau(\neg\Box\neg\Box\neg\Box\neg P, x) \to \tau(\neg\Box\neg P, x)\\
&= \neg\tau(\Box\neg\Box\neg\Box\neg P, x) \to \neg\tau(\Box\neg P, x)\\
&= \neg\forall y\ R(x,y) \to \tau(\neg\Box\neg\Box\neg P, y) \quad \to \neg\forall y\ R(x,y) \to \tau(\neg P, y)\\
&= \neg\forall y\ R(x,y) \to \neg\tau(\Box\neg\Box\neg P, y) \quad \to \neg\forall y\ R(x,y) \to \neg\tau(P, y)\\
&= \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg\forall x\ \ R(y,x) \to \tau(\neg\Box\neg P, x) \quad\ \ \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg P(y)\\
&= \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg\forall x\ \ R(y,x) \to \neg\tau(\Box\neg P, x) \quad\ \ \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg P(y)\\
&= \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg\forall x\ \ R(y,x) \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \tau(\neg P, y) \quad\ \ \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg P(y)\\
&= \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg\forall x\ \ R(y,x) \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg\tau(P, y) \quad\ \ \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg P(y)\\
&= \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg\forall x\ \ R(y,x) \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg P(y) \quad\ \ \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg P(y)\\
&= \varphi
\end{aligned}
$$

Myös kehysaksiooma esitetään predikaattilogiikan lauseena, jolloin saadaan lause

$$\forall x \forall y \big(R(x,y) \to R(y,x)\big) \qquad \text{(symmetrisyys)}$$

Tämä lause otetaan mukaan taulutodistukseen merkitsemällä se taulun juureen todeksi. Lisäksi tauluun merkitään lause $\forall x\varphi$ epätodeksi.

Muodostetaan taulu:

1. $\forall x\forall y\ \ R(x,y) \to R(y,x)$
2. $\neg\forall x\ \ \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg\forall x\ \ R(y,x) \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg P(y) \quad \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg P(y)$
3. $\neg\ \ \neg\forall y\ \ R(c,y) \to \neg\forall x\ \ R(y,x) \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg P(y) \quad \to \neg\forall y\ \ R(c,y) \to \neg P(y)$ $(2,\ x/c)$
4. $\neg\forall y\ \ R(c,y) \to \neg\forall x\ \ R(y,x) \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg P(y)$ (3)
5. $\neg\neg\forall y\ \ R(c,y) \to \neg P(y)$ (3)
6. $\neg\ \ R(c,d) \to \neg\forall x\ \ R(d,x) \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg P(y)$ $(4,\ y/d)$
7. $\forall y\ \ R(c,y) \to \neg P(y)$ (5)
8. $R(c,d)$ (6)
9. $\neg\neg\forall x\ \ R(d,x) \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg P(y)$ (6)
10. $\forall x\ \ R(d,x) \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg P(y)$ (9)
11. $R(d,c) \to \neg\forall y\ \ R(c,y) \to \neg P(y)$ $(10,\ x/c)$

<table>
<tr><td>12. $\neg R(d,c)$ (11)</td><td>13. $\neg\forall y\ \ R(c,y) \to \neg P(y)$ (11)</td></tr>
<tr><td>14. $\forall y\ \ R(c,y) \to R(y,c)$ $(1,\ x/c)$</td><td>18. $\neg\ \ R(c,e) \to \neg P(e)$ $(13,\ y/e)$</td></tr>
<tr><td>15. $R(c,d) \to R(d,c)$ $(14,\ y/d)$</td><td>19. $R(c,e)$ (18)</td></tr>
<tr><td>16. $\neg R(c,d)$ (15) | 17. $R(d,c)$ (15)</td><td>20. $\neg\neg P(e)$ (18)</td></tr>
<tr><td>$\otimes$ | $\otimes$</td><td>21. $R(c,e) \to \neg P(e)$ $(7,\ y/e)$</td></tr>
<tr><td></td><td>22. $\neg R(c,e)$ (21) | 23. $\neg P(e)$ (21)</td></tr>
<tr><td></td><td>$\otimes$ | $\otimes$</td></tr>
</table>

2. a) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_1P$, koska $v(s_1, P) = v(s_2, P) = \text{true}$, ja
$\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_2P$ ja $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_3P$, koska $v(s_1, P) = \text{true}$. Siten
$\mathcal{M}, s_1 \Vdash EP$.

   b) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_2EP$ ja $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_3EP$, koska $\mathcal{M}, s_1 \Vdash EP$. Lisäksi
$\mathcal{M}, s_2 \Vdash K_1P$, koska $v(s_1, P) = v(s_2, P) = \text{true}$,
$\mathcal{M}, s_2 \Vdash K_2P$, koska $v(s_2, P) = v(s_3, P) = \text{true}$ ja
$\mathcal{M}, s_2 \Vdash K_3P$, koska $v(s_2, P) = \text{true}$. Siten
$\mathcal{M}, s_2 \Vdash EP$, mistä seuraa, että
$\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_1EP$. Siis
$\mathcal{M}, s_1 \Vdash EEP$.

   Toisaalta tulos saadaan myös, jos huomataan, että P on tosi kaikissa maailmoissa, jotka ovat saavutettavissa s_1:stä kahdella askeleella.

   c) $\mathcal{M}, s_1 \nVdash CP$, koska s_4 on C-saavutettavissa s_1:stä ja $v(s_4, P) = \text{false}$.

3. Olkoon φ lause, joka ei ole **S5**-pätevä. Tällöin sillä on olemassa universaali vastamalli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, jossa on maailma $s \in S$, jolle $\mathcal{M}, s \nVdash \varphi$.

   Olkoon

$$F = \{\Box\psi \mid \Box\psi \text{ on } \varphi\text{:n alilause ja } \mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box\psi\}.$$

   Silloin jokaista lausetta $\Box\psi \in F$ vastaa maailma $s_\psi \in S$ siten, että $\langle s, s_\psi \rangle \in R$ ja

$$\mathcal{M}, s_\psi \Vdash \neg\psi.$$

   Olkoon $\mathcal{M}' = \langle S', R', v' \rangle$, missä

$$S' = \{s\} \cup \{s_\psi \mid \Box\psi \in F\} \subseteq S,$$

   $R' = S' \times S'$ ja $v'(s', P) = v(s', P)$ kaikille φ:ssä esiintyville atomilauseille P ja kaikille $s' \in S'$. Koska $|F| < |\text{Sub}(\varphi)|$, on silloin $|S'| \leq |\text{Sub}(\varphi)|$. ($|\text{Sub}(\varphi)|$ on φ:n alilauseiden lukumäärä.)

   Osoitetaan induktiolla, että jokaiselle $s' \in S'$ ja jokaiselle φ:n alilauseelle ψ pätee

$$\mathcal{M}, s' \Vdash \psi \quad \text{joss} \quad \mathcal{M}', s' \Vdash \psi.$$

   Perustapaus (alilause on atomilause) on triviaali. Myös muotoa $\psi' \wedge \psi''$ ja $\neg\psi$ olevien alilauseiden induktioaskeleet seuraavat heti. Olkoon sitten alilause muotoa $\Box\psi$. Olkoon $s' \in S'$.

Jos $\mathcal{M}, s' \Vdash \Box\psi$, niin $\mathcal{M}, t \Vdash \psi$ kaikilla $t \in S'$, koska $\mathcal{M}$ on universaali. Induktio-oletuksen perusteella $\mathcal{M}', t \Vdash \psi$ kaikilla $t \in S'$, mistä seuraa, että $\mathcal{M}', s' \Vdash \Box\psi$.

Toisaalta, jos $\mathcal{M}, s' \nVdash \Box\psi$, niin $\mathcal{M}, t \Vdash \neg\Box\psi$ kaikilla $t \in S'$, koska $\mathcal{M}$ on universaali. Erityisesti $\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box\psi$, ja siksi $\Box\psi \in F$. On siis olemassa maailma $s_\psi \in S'$ siten, että $\langle s, s_\psi \rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s_\psi \Vdash \neg\psi$, eli $\mathcal{M}, s_\psi \nVdash \psi$. Induktio-oletuksen perusteella seuraa, että $\mathcal{M}', s_\psi \nVdash \psi$, joten $\mathcal{M}', s_\psi \Vdash \neg\psi$. Koska myös $\mathcal{M}'$ on universaali, seuraa, että $\mathcal{M}', s' \nVdash \Box\psi$.

Koska erityisesti $s \in S'$ ja $\mathcal{M}, s \nVdash \varphi$, yllä olevan tuloksen perusteella seuraa, että $\mathcal{M}', s \nVdash \varphi$. Siten myös $\mathcal{M}'$ on vastamalli φ:lle.

Jos φ ei ole **S5**-pätevä, on olemassa universaali vastamalli $\mathcal{M}$ ja maailma s siten, että $\mathcal{M}, s \nVdash \varphi$. Yllä olevan konstruktion avulla saadaan φ:lle toinen universaali vastamalli $\mathcal{M}'$, jossa on korkeintaan $|\mathrm{Sub}(\varphi)|$ maailmaa.