T-79.5101 **kevät 2007**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 4

1. Olkoon P atomilause ja $\mathbf{L}$ kaikkien kehysten joukko. Osoita, että

$$\{\Box P \to \Diamond P\} \models_{\mathbf{L}} \{\Box\Box\neg P\} \Longrightarrow \Diamond\Box P$$

ei päde.

2. Olkoot P ja Q atomilauseita ja $\mathbf{L}$ kaikkien kehysten joukko. Osoita, että

$$\{\Diamond P \vee \Diamond Q\} \models_{\mathbf{L}} \{\neg\Box P\} \Longrightarrow \Diamond Q$$

ei päde.

3. Osoita, että kaikille $\mathbf{L}, \Sigma, \Upsilon, P, Q$ pätee:

jos $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P \wedge \Box P \wedge \Box\Box P \wedge \Box\Box\Box P \to Q$,
niin $\Sigma \cup \{P\} \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow Q$.

4. a) Osoita, että jos kehys on transitiivinen, niin $\Box P \to \Box\Box P$ on pätevä kehyksessä.

b) Osoita, että $\neg\Box P \to \Box\neg\Box P$ on pätevä jokaisessa euklidisessa kehyksessä.

5. Osoita, että jos kehys on refleksiivinen ja euklidinen, se on myös symmetrinen ja transitiivinen.

T-79.5101 **kevät 2007**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 5

1. a) Osoita, että jos kehys on sarjallinen, niin $\Box P \to \Diamond P$ on pätevä kehyksessä.

b) Osoita, että jos kehys on heikosti tiheä, niin $\Box\Box P \to \Box P$ on pätevä kehyksessä.

2. a) Anna lauseelle $\Box P \to \Box(Q \to P)$ (Hilbert-tyylinen) $\mathbf{K}$-todistus.

b) Anna lauseelle

$$\Box\neg Q \to \Box\neg P$$

(Hilbert-tyylinen) $\mathbf{K}$-johto lausejoukosta $\{\Box(P \to Q)\}$. Osoita siis, että

$$\{\Box(P \to Q)\} \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \Box\neg Q \to \Box\neg P.$$

3. a) Osoita, että

$$\{P \to Q, \neg Q \to P, R\} \vdash_{\mathbf{K}} \{\neg R \vee Q, \neg Q \vee S\} \Longrightarrow \Box Q \wedge S$$

pätee (antamalla $\mathbf{K}$-johto lauseelle $\Box Q \wedge S$).

b) Osoita, että

$$\{\Diamond Q \to \Box Q, Q \to \neg P\} \vdash_{\mathbf{K}} \{\Diamond P\} \Longrightarrow \Box\neg Q$$

pätee.

T-79.5101 **kevät 2007**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 6

1. Osoita, että seuraavat lauseet ovat **K**-päteviä antamalla niille modaalilogiikan **K** mukainen taulutodistus.

a) $\Box P \to \Box(Q \to P)$

b) $\Box(P \to Q) \to (\neg\Box\neg P \to \neg\Box\neg Q)$

c) $(\Box P \wedge \Box Q) \to \Box(P \wedge Q)$

2. Tutki taulumenetelmällä, ovatko seuraavat lauseet **K**-päteviä. Jos lause ei ole pätevä, anna malli lauseen negaatiolle.

a) $\Diamond A \to \Box A$

b) $\Diamond\Box A \vee \Box\Diamond\neg A$

c) $(\Box\Box A \to \Box A) \to \Box(\Box A \to A)$

3. Tutki taulumenetelmällä, ovatko seuraavat lauseet **K**-päteviä. Jos lause ei ole pätevä, anna malli lauseen negaatiolle.

a) $\big(\Box(P \to Q) \to \Box(Q \to R)\big) \to \neg\Box(P \to R)$

b) $(\Diamond P \wedge \Diamond Q) \to \Diamond(P \wedge Q)$

c) $\Box(P \wedge Q) \to (\Box P \wedge \Box Q)$

T-79.5101 **kevät 2007**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 7

1. a) Osoita taulumenetelmällä, että $\Diamond(P \vee \Diamond\Box\Box P) \to \Diamond P$ on **S4**-pätevä (**S4** on refleksiivisten ja transitiivisten kehysten joukko).

b) Osoita taulumenetelmällä, että $\Diamond\big(\Diamond P \to \Box(\Diamond P \vee P)\big)$ on **T**-pätevä (**T** on refleksiivisten kehysten joukko).

c) Osoita taulumenetelmällä, että $\Box\big(\Box(\Box P \wedge Q) \to \Diamond\Box\Diamond\Diamond(P \vee Q)\big)$ on **KB**-pätevä (**KB** on symmetristen kehysten joukko).

d) Osoita taulumenetelmällä, että $\Box P \to \Diamond\big((P \to \Box Q) \to Q\big)$ on **D4**-pätevä (**D4** on sarjallisten ja transitiivisten kehysten joukko).

e) Osoita taulumenetelmällä, että $\Diamond(\Box\Diamond\Box P \to \Box P)$ on **S5**-pätevä (**S5** on refleksiivisten, symmetristen ja transitiivisten kehysten joukko).

2. Tutki taulumenetelmällä, onko lause $\Diamond P \to \Diamond\Box P$ **K**-pätevä tai **K4**-pätevä, missä **K** on kaikkien kehysten joukko ja **K4** on transitiivisten kehysten joukko.

3. Osoita taulumenetelmällä, että $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \{\neg P\} \Longrightarrow (\Diamond P \to \Diamond\Diamond P) \wedge \neg P$ pätee, missä

$$\Sigma = \{\Box P \to P, \Box P \to \Box\Box P, \Box\neg P \to \neg P, \Box\neg P \to \Box\Box\neg P\}.$$