T-79.5101 **kevät 2007**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 8

1. Anna lauseen

$$\Diamond\Box\Diamond P \to \Diamond P$$

käännös predikaattilogiikkaan ja osoita käännöstä ja predikaattilogiikan taulumenetelmää käyttäen, että lause on **KB**-pätevä.

2. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R_1, R_2, R_3, v\rangle$, missä

$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$,
$R_1 = \big\{\langle s_1, s_1\rangle, \langle s_2, s_2\rangle, \langle s_3, s_3\rangle, \langle s_4, s_4\rangle, \langle s_1, s_2\rangle, \langle s_2, s_1\rangle\big\}$,
$R_2 = \big\{\langle s_1, s_1\rangle, \langle s_2, s_2\rangle, \langle s_3, s_3\rangle, \langle s_4, s_4\rangle, \langle s_3, s_2\rangle, \langle s_2, s_3\rangle\big\}$,
$R_3 = \big\{\langle s_1, s_1\rangle, \langle s_2, s_2\rangle, \langle s_3, s_3\rangle, \langle s_4, s_4\rangle, \langle s_3, s_4\rangle, \langle s_4, s_3\rangle\big\}$ ja
$v(s_1, P) = v(s_2, P) = v(s_3, P) = \text{true}$, $v(s_4, P) = \text{false}$.

Tutki, päteekö modaalilogiikassa $\mathbf{S5_3}$
a) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash EP$
b) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash EEP$
c) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash CP$.

3. Osoita, että jos lause ei ole **S5**-pätevä, sillä on vastamalli (malli, jossa se on epätosi), jossa on korkeintaan yhtä monta maailmaa, kuin lauseella on alilauseita.

T-79.5101 **kevät 2007**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 9

1. CTL määritellään käyttämällä operaattoreita **A**, **E**, **X** ja **U**, joiden avulla voidaan edelleen määritellä lisää operaattoreita:

$\mathbf{EX}P$: $\neg\mathbf{AX}\neg P$

$\mathbf{AF}P$: $\mathbf{A}(\top\mathbf{U}P)$

$\mathbf{EF}P$: $\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P)$

$\mathbf{AG}P$: $\neg\mathbf{EF}\neg P$

$\mathbf{EG}P$: $\neg\mathbf{AF}\neg P$

Anna kullekin uudelle operaattorille sen semantiikan määrävä ehto perusoperaattoreiden tapaan: $\mathcal{M}, s \models \mathbf{AX}P$ joss $\mathcal{M}, t \models P$ kaikille t, joille sRt.

2. LTL määritellään käyttämällä operaattoreita **X** ja **U**, joiden avulla voidaan edelleen määritellä lisää operaattoreita:

$\mathbf{F}P$: $\top\mathbf{U}P$

$\mathbf{G}P$: $\neg\mathbf{F}\neg P$

$P\mathbf{R}Q$: $\neg\big((\neg P)\mathbf{U}(\neg Q)\big)$

Anna kullekin uudelle operaattorille sen semantiikan määrävä ehto perusoperaattoreiden tapaan: $\mathcal{M}, x \models \mathbf{X}P$ joss $\mathcal{M}, x^1 \models P$.

3. Olkoon $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$, missä

$$S = \{s_0, s_1, s_2\} \quad \text{ja} \\ R = \big\{\langle s_0, s_1\rangle, \langle s_1, s_2\rangle, \langle s_2, s_2\rangle\big\}.$$

Olkoot P ja Q atomilauseita. Määrittele atomilauseille valuaatio v kehyksen $\mathcal{F}$ maailmoissa s_0, s_1 ja s_2 siten, että kehykseen $\mathcal{F}$ perustuvan mallin $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ täydelle polulle $x = (s_0, s_1, s_2, s_2, s_2, \ldots)$ pätee

$$\mathcal{M}, x \models P\mathbf{U}Q, \quad \text{mutta} \quad \mathcal{M}, x \not\models Q\mathbf{R}P.$$

T-79.5101 **kevät 2007**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 10

1. Formalisoi seuraavat lauseet CTL-kielellä.

a) P on tosi nykyisessä tilassa ja Q on tosi jossakin tulevassa tilassa.

b) P on tosi jossakin tulevassa tilassa ja siitä lähtien epätosi kaikissa tulevissa tiloissa.

c) Jos P on tosi missä tahansa kahdessa peräkkäisessä tilassa, niin jälkimmäisestä tilasta lähtien on olemassa tuleva tila, jossa Q on tosi.

d) Jos P on tosi nykyisessä tilassa, niin P pysyy totena, kunnes Q toteutuu. Muussa tapauksessa P:n on toteuduttava korkeintaan kahden askeleen päässä.

e) On olemassa polku, jolla P on tosi, kunnes saavutetaan tila, josta lähtien Q on kaikissa peräkkäisissä tiloissa vuoroin tosi ja vuoroin epätosi.

f) Jos polulla on tila, jossa P on tosi, niin polulla ei ole tilaa, jossa Q tai R ovat tosia.

2. a) Anna malli, jossa CTL-lause $\mathbf{AF}P$ on toteutuva, mutta LTL-lause $\mathbf{GF}P$ ei.

b) Anna malli, jossa CTL-lause $\mathbf{EFAG}P$ on pätevä, mutta LTL-lause $\mathbf{FG}P$ ei.

c) Anna malli, jossa LTL-lause $\mathbf{FX}P$ on toteutuva, mutta CTL-lause $\mathbf{EFAX}P$ ei.

3. Anna malli, jossa CTL*-lausejoukot

a) $\{\mathbf{E}(\neg V \mathbf{U} P), \mathbf{E}(V \mathbf{U} \neg P), \mathbf{AF}(V \rightarrow \mathbf{AX}\neg V) \wedge \mathbf{EF}V\}$

b) $\{\mathbf{AG}(P \rightarrow \mathbf{F}V), \mathbf{AF}\big(P \wedge \mathbf{F}(\neg P \wedge \mathbf{X}P)\big), \mathbf{A}(\neg V \mathbf{U} V)\}$

ovat päteviä.