PROPOSITIONAALISET MODAALILOGIIKAT

1. Peruskäsitteitä ja määritelmiä
2. Mahdollisten maailmojen semantiikka
3. Semanttiset perusominaisuudet

M. Fitting: *Basic Modal Logic*, luvut 1.1 – 1.2 (s. 372 – 377).

1. Peruskäsitteitä ja määritelmiä

Käsittelemme ensin propositionaalisia modaalilogiikoita, joissa on modaalioperaattori $\Box$ ja sen duaalioperaattori $\Diamond$ ($\neg\Box\neg$).

Nämä voidaan tulkita luonnolliselle kielelle monella eri tavalla:

$\Box P$	$\Diamond P$
välttämättä P	mahdollisesti P
aina tulevaisuudessa P	
aina menneisyydessä P	
pitäisi olla P	
tiedetään että P	
uskotaan että P	

Modaalilogiikan syntaksi

Olkoon annettuna atomilauseiden joukko $\Phi = \{p_1, p_2, \ldots\}$.

Propositionaaliset modaalilauseet:

1. Atomilauseet ovat *lauseita*.
2. $\top$ ja $\bot$ ovat *lauseita*.
3. Jos P ja Q ovat lauseita, niin myös $\neg P$, $(P \to Q)$, $\Box P$ ovat *lauseita*.
4. Muita *lauseita* ei ole.

Huom! Lyhennysmerkinnät:

$$\Diamond P \equiv_{\text{def}} \neg\Box\neg P \qquad P \vee Q \equiv_{\text{def}} \neg P \to Q$$

$$P \wedge Q \equiv_{\text{def}} \neg(P \to \neg Q) \qquad P \leftrightarrow Q \equiv_{\text{def}} \neg((P \to Q) \to \neg(Q \to P))$$

Tautologiat

Määritelmä. Jos lause Q saadaan lauseesta P korvaamalla P:n atomilauseet uusilla lauseilla järjestelmällisesti, sanotaan, että Q saadaan P:stä *sijoittamalla*.

Lauseita, jotka saadaan sijoittamalla lauselogiikan pätevistä lauseista (tautologioista), sanotaan *klassisiksi tautologioiksi*.

Esimerkki. Lause

$$(\Box\Box P \to (R \to \Box S)) \to (\Box\Box P \to (R \to \Box S))$$

on klassinen tautologia, joka on saatu lauselogiikan tautologiasta $P \to P$ korvaamalla P lauseella $(\Box\Box P \to (R \to \Box S))$

Tautologiat

Klassiset tautologiat voidaan tunnistaa lauselogiikan menetelmin.

Rakennetaan esim. semanttinen taulu lauseen negaatiolle pitämällä modaalioperaattorilla alkavia lauseita atomisina (niihin ei sovelleta taulusääntöjä). Jos taulu sulkeutuu, kyseessä on klassinen tautologia.

Esimerkki. Osoitetaan, että $(\Box\neg\Box(P \to Q) \land \Box(\neg P \land \neg Q)) \to (\Box\neg\Box(P \to Q) \lor \Box(\neg P \land \neg Q))$ on klassinen tautologia.

1.	$\neg((\Box\neg\Box(P \to Q) \land \Box(\neg P \land \neg Q)) \to (\Box\neg\Box(P \to Q) \lor \Box(\neg P \land \neg Q)))$	
2.	$\Box\neg\Box(P \to Q) \land \Box(\neg P \land \neg Q)$	(1)
3.	$\neg(\Box\neg\Box(P \to Q) \lor \Box(\neg P \land \neg Q))$	(1)
4.	$\Box\neg\Box(P \to Q)$	(2)
5.	$\Box(\neg P \land \neg Q)$	(2)
6.	$\neg\Box\neg\Box(P \to Q)$	(3)
	$\times$	

Logiikka = (pätevien) lauseiden joukko

Määritelmä. *Propositionaalinen modaalilogiikka* $\mathcal{L}$ on joukko propositionaalisia modaalilauseita siten, että

1. kaikki (klassiset) tautologiat kuuluvat joukkoon $\mathcal{L}$;
2. $\mathcal{L}$ on suljettu modus ponensin suhteen: (jos $P \in \mathcal{L}$ ja $P \to Q \in \mathcal{L}$, niin $Q \in \mathcal{L}$) ;
3. $\mathcal{L}$ on suljettu sijoittamisen suhteen: (jos $P \in \mathcal{L}$ ja Q saadaan sijoittamalla lauseesta P, niin $Q \in \mathcal{L}$).

Esimerkki. (1) Klassiset tautologiat ovat modaalilogiikka.

(2) Kaikkien propositionaalisten modaalilauseiden joukko on modaalilogiikka.

2. Mahdollisten maailmojen semantiikka

Määritelmä. *Kehys* on pari $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$, missä S on ei-tyhjä joukko ja R on relaatio $R \subseteq S \times S$.

Joukon S alkiot ovat *mahdollisia maailmoja* ja R on maailmojen välinen saavutettavuusrelaatio: jos $s_1 R s_2$, niin s_2 on saavutettavissa s_1:stä.

Määritelmä. *Valuaatio* kehyksessä $\langle S, R\rangle$ on funktio v, joka kuvaa mahdolliset maailmat ja atomilauseet totuusarvoille (kaikille $s \in S$ ja atomilauseille P, $v(s,P)$ on joko true tai false).

(Vaihtoehtoinen tapa: valuaatio $v : S \to 2^{\Phi}$ on funktio siten, että $v(s)$ on tilassa s tosien atomilauseiden joukko).

Määritelmä. *Malli* on kolmikko $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $\langle S, R\rangle$ on kehys ja v valuaatio tässä kehyksessä. $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ *perustuu kehykseen* $\langle S, R\rangle$.

Toteutuvuusrelaatio

Relaatio $\mathcal{M}, s \Vdash P$ (merk. myös usein $\mathcal{M}, s \models P$), joka kertoo onko lause P tosi mallin $\mathcal{M}$ maailmassa s, määritellään seuraavasti.

Määritelmä. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ malli.

1. $\mathcal{M}, s \Vdash P$ joss (jos ja vain jos) $v(s,P) = \text{true}$, kun P on atomilause.
2. $\mathcal{M}, s \nVdash \bot$ ja $\mathcal{M}, s \Vdash \top$.
3. $\mathcal{M}, s \Vdash \neg P$ joss $\mathcal{M}, s \nVdash P$.
4. $\mathcal{M}, s \Vdash P \to Q$ joss $\mathcal{M}, s \nVdash P$ tai $\mathcal{M}, s \Vdash Q$.
5. $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$ joss $\mathcal{M}, t \Vdash P$ kaikille $t \in S$ joille sRt.

Huom! $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond P$ joss $\mathcal{M}, t \Vdash P$ jollekin $t \in S$ jolle sRt.

Toteutuvuusrelaatio

Esimerkki. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ malli, missä

$S = \{s,t\}$ ja $R = \{\langle s,t\rangle\}$
$v(s,P) = \text{true}$ (tai $v(s) = \{P\}$)
$v(t,P) = \text{false}$ (tai $v(t) = \{\}$)

$$\mathcal{M}: \begin{tikzcd} \underset{s}{\overset{\{P\}}{\bullet}} \arrow[r] & \underset{t}{\overset{\{\}}{\bullet}} \end{tikzcd}$$

- $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P$.
- $\mathcal{M}, t \Vdash \Box P$.
- $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond\neg P$.
- $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P \to P$.
- $\mathcal{M}, t \nVdash \Box P \to P$.

Pätevyys

Määritelmä.

- Lause P on *tosi* mallin $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ maailmassa s joss $\mathcal{M}, s \Vdash P$.
- Lause P on *pätevä mallissa* $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, joss P on tosi mallin jokaisessa maailmassa ($\mathcal{M} \models P$).
- Lause P on *pätevä mallien joukossa* $\mathbf{C}$, joss P on pätevä jokaisessa $\mathbf{C}$:n mallissa ($\mathbf{C} \models P$).
- Lause P on *pätevä kehysten joukossa* $\mathbf{F}$, joss P on pätevä $\mathbf{F}$:n kehyksiin perustuvien mallien joukossa ($\mathbf{F} \models P$).

Pätevyys (jatkoa)

- Jos lause P on pätevä mallien/kehysten joukossa $\mathbf{C}$, niin sanotaan, että lause P on $\mathbf{C}$-pätevä.
- Lausejoukon Σ pätevyys mallien/kehysten joukossa $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} \models \Sigma$) tarkoittaa, että jokainen joukon Σ lause on pätevä ko. joukossa $\mathbf{C}$.

Esimerkki. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ missä $S = \{s,t\}$, $R = \{\langle s,t\rangle\}$ ja valuaatio $v(s,P) = \text{true}$, $v(t,P) = \text{false}$.

- $\Box P \to P$ ei ole pätevä $\mathcal{M}$:ssä.
  $\mathcal{M}, t \nVdash \Box P \to P$.
- $P \lor \Box P$ on pätevä $\mathcal{M}$:ssä.
- $\Box\Box P$ on $\mathbf{F}$-pätevä, missä $\mathbf{F} = \{\langle S, R\rangle\}$.

3. Semantiikan perusominaisuudet

Teoreema. (Mahdollisten maailmojen semantiikan perusteoreema) Jos $\mathbf{C}$ on joukko malleja, $\mathbf{C}$-pätevien lauseiden joukko

1. sisältää kaikki tautologiat;
2. sisältää kaikki muotoa $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$ olevat lauseet;
3. sisältää lauseen Q aina, kun siihen kuuluvat P ja $P \to Q$;
4. sisältää lauseen $\Box P$ aina, kun siihen kuuluu P;

ja jos $\mathbf{F}$ on joukko kehyksiä, $\mathbf{F}$-pätevien lauseiden joukko on myös suljettu sijoittamisen suhteen.

Todistus. (1.) Mielivaltainen tautologia on tosi jokaisen mallin jokaisessa tilassa, joten se sisältyy $\mathbf{C}$-pätevien lauseiden joukkoon.

(2.) Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ mielivaltainen joukon $\mathbf{C}$ malli ja s joukon S tila. Tehdään vastaoletus, että jokin muotoa $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$ oleva lause ei ole tosi tilassa s. Tällöin

(i) $\mathcal{M}, s \Vdash \Box(P \to Q)$ ja

(ii) $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$, mutta

(iii) $\mathcal{M}, s \nVdash \Box Q$.

Tällöin on olemassa $t \in S$, jolle sRt ja $\mathcal{M}, t \nVdash Q$ (iii). Mutta nyt

$\mathcal{M}, t \Vdash P \to Q$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash P$ (i & ii), jolloin $\mathcal{M}, t \Vdash Q$, ristiriita.

Siispä jokainen muotoa $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$ oleva lause on tosi missä tahansa tilassa s ja siten edelleen $\mathbf{C}$-pätevä.

Todistus (jatkuu).

(3.) Olkoon P ja $P \to Q$ $\mathbf{C}$-päteviä lauseita.

Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ mielivaltainen joukon $\mathbf{C}$ malli ja s joukon S tila.

Tällöin P ja $P \to Q$ ovat tosia tilassa s, jolloin Q on tosi tilassa s. Siis Q on tosi jokaisen joukkoon $\mathbf{C}$ kuuluvan mallin jokaisessa tilassa, joten Q on $\mathbf{C}$-pätevä.

(4.) Olkoon P $\mathbf{C}$-pätevä lause.

Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ mielivaltainen joukon $\mathbf{C}$ malli ja s joukon S tila.

Tällöin kaikille tiloille $t \in S$, joille sRt, $\mathcal{M}, t \Vdash P$ ja $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$. Täten $\Box P$ on $\mathbf{C}$-pätevä.

Todistus (jatkuu).

Osoitetaan vielä, että jos $\mathbf{F}$ on joukko kehyksiä, $\mathbf{F}$-pätevien lauseiden joukko on suljettu sijoittamisen suhteen, t.s.

jos lause X on $\mathbf{F}$-pätevä, niin lause $\sigma(X)$ on $\mathbf{F}$-pätevä,

missä $\sigma(X)$ saadaan lauseesta X sijoituksella σ, jossa lauseen X kukin atomilause P, korvataan lauseella $\sigma(P)$
(huom. myös $\sigma(P) = P$ mahdollinen).

Oletetaan, että $\sigma(X)$ ei ole $\mathbf{F}$-pätevä ja osoitetaan, että tällöin X ei ole $\mathbf{F}$-pätevä.

Jos $\sigma(X)$ ei ole $\mathbf{F}$-pätevä, on olemassa $\langle S, R \rangle \in \mathbf{F}$, v ja $t \in S$ siten, että $\mathcal{M}, t \nVdash \sigma(X)$, missä $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$.

Todistus (jatkuu).

Olkoon $\mathcal{M}' = \langle S, R, v' \rangle$, missä $v'(P, s) = \text{true}$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(P)$.

Osoitetaan rakenteisella induktiolla kaikilla lauseille Z, että kaikille tiloille $s \in S$ pätee: $\mathcal{M}', s \Vdash Z$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(Z)$.

- Jos Z on atomilause, tällöin $\mathcal{M}', s \Vdash Z$ joss $v'(Z, s) = \text{true}$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(Z)$.
- Jos Z on muotoa $\top$ tai $\bot$, $\mathcal{M}', s \Vdash Z$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(Z)$.
- Jos Z on muotoa $\neg Z'$, niin $\mathcal{M}', s \Vdash \neg Z'$ joss $\mathcal{M}', s \nVdash Z'$. Induktio-oletuksen perusteella tämä pätee täsmälleen, kun $\mathcal{M}, s \nVdash \sigma(Z')$, joka pätee joss $\mathcal{M}, s \Vdash \neg\sigma(Z')[= \sigma(\neg Z')]$.

Todistus (jatkuu).

- Jos Z on muotoa $Z' \to Z''$, niin $\mathcal{M}', s \Vdash Z' \to Z''$ joss $\mathcal{M}', s \not\Vdash Z'$ tai $\mathcal{M}', s \Vdash Z''$ joss $\mathcal{M}, s \not\Vdash \sigma(Z')$ tai $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(Z'')$ [IH] joss $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(Z') \to \sigma(Z'')[= \sigma(Z' \to Z'')]$.
- Jos Z on muotoa $\Box Z'$, niin $\mathcal{M}', s \Vdash \Box Z'$ joss kaikille $t \in S$, joille sRt, pätee $\mathcal{M}', t \Vdash Z'$ joss kaikille $t \in S$, joille sRt, pätee $\mathcal{M}, t \Vdash \sigma(Z')$ [IH] joss $\mathcal{M}, s \Vdash \Box\sigma(Z')[= \sigma(\Box Z')]$.

Näin ollen jos $\mathcal{M}, t \not\Vdash \sigma(X)$, niin $\mathcal{M}', t \not\Vdash X$, joten X ei ole $\mathbf{F}$-pätevä.■

Normaalit modaalilogiikat

Seurauslause. Jos $\mathbf{L}$ on ei-tyhjä kehysten joukko, niin $\mathbf{L}$-pätevien lauseiden joukko on propositionaalinen modaalilogiikka.

Merkintää $\mathbf{L}$ voidaan käyttää kahdessa merkityksessä:

(1) kehysjoukko ja (2) kehysjoukossa pätevien lauseiden joukko.

Määritelmä. Propositionaalista modaalilogiikkaa sanotaan normaaliksi, jos se sisältää (i) kaikki muotoa $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$ olevat lauseet ja (ii) lauseen $\Box P$ aina, kun siihen kuuluu P.

Määritelmä. Lausejoukkoa $\mathcal{L}$ sanotaan *kehyslogiikaksi*, jos $\mathcal{L}$ on $\mathbf{L}$-pätevien lauseiden joukko jollekin ei-tyhjälle kehysten joukolle $\mathbf{L}$.

Samaa merkintää $\mathbf{L}$ voidaan käyttää sekä logiikasta että vastaavasta kehysjoukosta.