

PERUSTULOKSIA MALLEISTA

1. Suhde predikaattilogiikkaan
 2. Generoitu alikehys
 3. Kehysten p-morfismi
 4. Looginen seuraavuus
 5. Deduktioteoreema
- M. Fitting: *Basic Modal Logic*, luvut 1.3 – 1.4 (s. 377 – 384).

Refleksiivisten relaatioiden karakterisointi

Esimerkki. Lause $\Box P \rightarrow P$ on pätevä kehyksessä $\langle S, R \rangle$ joss R on refleksiivinen (eli $\forall x R(x, x)$ on tosi struktuurissa $\langle S, R \rangle$).

Todistus. (\Leftarrow) Olkoon $R \subseteq S \times S$ refleksiivinen relaatio, $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ kehukseen $\langle S, R \rangle$ perustuva malli ja $s \in S$.

Jos $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$, $\mathcal{M}, s \Vdash P$, koska sRs . Täten $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P \rightarrow P$.

(\Rightarrow) Oletetaan, että R ei ole refleksiivinen kehyksessä $\langle S, R \rangle$. Tällöin on olemassa $s_0 \in S$, jolle $s_0 R s_0$ ei päde.

Olkoon $v(s, P) = \text{true}$ jos $s_0 R s$ muutoin $v(s, P) = \text{false}$. Nyt $v(s_0, P) = \text{false}$.

Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$. Tällöin $\mathcal{M}, s_0 \Vdash \Box P$ mutta $\mathcal{M}, s_0 \not\Vdash P$.

Siis $\mathcal{M}, s_0 \not\Vdash \Box P \rightarrow P$, joten $\Box P \rightarrow P$ ei ole pätevä kehyksessä $\langle S, R \rangle$. ■

1. Suhde predikaattilogiikkaan

- Kehys voidaan nähdä struktuurina predikaattilogiikalle, jossa on yksi kaksipaikkainen predikaattisymboli (R):
predikaattilogiikan struktuuri s voidaan esittää muodossa $\langle U, R^s \rangle$, missä U on struktuurin universumi ja relaatio $R^s \subseteq U \times U$ predikaattisymbolin R tulkinta.
- Propositionaalista modaalilogiikkaa voidaan käyttää kvantifioidun logiikan tilalla:
jossain tapauksissa predikaattilogiikan lauseelle P voidaan antaa vastaava modaalilause P' siten, että P on tosi struktuurissa joss P' on pätevä struktuurissa tulkittuna modaalilogiikan kehukseksi.

Määriteltävyydestä

- Esimerkin nojalla predikaattilogiikan lause $\forall x R(x, x)$ voidaan ilmaista propositionaalisen modaalilogiikan lauseella $\Box P \rightarrow P$.
- Mutta kuinka pitkälle modaalilogiikka riittää?
Minkälaisia predikaattilogiikan lauseita ei voida esittää modaalilogiikalla?
- Tarkastellaan muutamaa pätevyuden säilyttävää operaatiota kehyksille (generoitu alikehys, pistevieras unioni ja p-morfismi), jotka antavat viitteitä modaalilogiikan ilmaisuvoiman rajoista.
☞ Lauseita $\exists x \exists y R(x, y)$, $\forall x \forall y R(x, y)$ ja $\forall x \neg R(x, x)$ ei voida ilmaista propositionaalisella modaalilogiikalla.

2. Generoitu alikehys

Määritelmä. Olkoon $\langle S, R \rangle$ kehys ja $\emptyset \subset S_0 \subseteq S$ joukko maailmoja.

Joukon S_0 **generoima alikehys** on kehys $\langle S^*, R^* \rangle$, missä S^* on pienin R -suljettu S :n alijoukko, joka sisältää S_0 :n ja R^* on R rajoitettuna joukolla S^* ($R^* = \{ \langle s_1, s_2 \rangle \in R \mid s_1, s_2 \in S^* \} = R \cap (S^* \times S^*)$).

Joukon S alijoukko H on **R -suljettu**, jos $t \in H$ aina, kun $s \in H$ ja sRt .

Huom. S^* on niiden maailmojen joukko, jotka voidaan saavuttaa S_0 :sta (transitiivisesti).

Määritelmä. Mallin $\langle S, R, v \rangle$ **generoitu alimalli** on malli $\langle S^*, R^*, v^* \rangle$, missä $\langle S^*, R^* \rangle$ on generoitu alikehys ja v^* on v rajoitettuna S^* :lle. Alikehys on generoitu, jos se on jonkun maailmojen joukon generoima.

Generoidun alimallin ominaisuudet

Propositio. Jos \mathcal{M}^* on \mathcal{M} :n generoitu alimalli, niin jokaiselle lauseelle P ja jokaiselle mallin \mathcal{M}^* maailmalle s pätee:

$$\mathcal{M}, s \models P \text{ joss } \mathcal{M}^*, s \models P.$$

Esimerkki. Olkoon $S = \{s, t_1, t_2\}$ ja $R = \{ \langle t_1, t_2 \rangle \}$.

Joukko $\{s\}$ generoi alikehysen $\langle S^*, R^* \rangle$, missä $S^* = \{s\}$ ja $R^* = \{\}$.

Nyt $\exists x \exists y R(x, y)$ on tosi kehyksessä $\langle S, R \rangle$

ja $\exists x \exists y R(x, y)$ on epätosi kehyksessä $\langle S^*, R^* \rangle$.

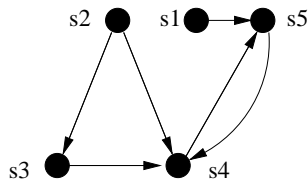
Mutta kaikille lauseille P ja jokaiselle valuaatiolle v on voimassa:

$$\langle S, R, v \rangle, s \models P \text{ joss } \langle S^*, R^*, v^* \rangle, s \models P.$$

\implies Ei ole lausetta P siten, että P on pätevä kehyksessä $\langle S, R \rangle$ joss R :lle pätee $\exists x \exists y R(x, y)$.

Esimerkki

Tarkastellaan seuraavaa kehystä:



- Joukko $S_0 = \{s_2\}$ generoi alikehysen, missä $S^* = \{s_2, s_3, s_4, s_5\}$ ja $R^* = R \cap (S^* \times S^*)$ vastaa näiden välisiä kaaria.
- Joukko $S_0 = \{s_5\}$ generoi alikehysen, missä $S^* = \{s_4, s_5\}$.
- Joukko $S_0 = \{s_1, s_3\}$ generoi alikehysen, missä $S^* = \{s_1, s_3, s_4, s_5\}$.

Kehyksien pistevieras unioni

Pistevieras unioni: 'kopioid' kehysistä niin, etteivät maailmojen joukot leikkaa ja otetaan unioni maailmoista ja saavutettavuusrelaatioista.

Propositio. Lause P on pätevä kahden kehysen pistevieraassa unionissa joss P on pätevä kummassakin kehyksessä.

Esimerkki. Olkoon $S = \{s\}$ ja $R = \{ \langle s, s \rangle \}$.

Kehysen $\langle S, R \rangle$ pistevieras unioni itsensä kanssa $\langle S, R \rangle \dot{\cup} \langle S, R \rangle = \langle S', R' \rangle$ missä $S' = \{s_1, s_2\}$ ja $R' = \{ \langle s_1, s_1 \rangle, \langle s_2, s_2 \rangle \}$.

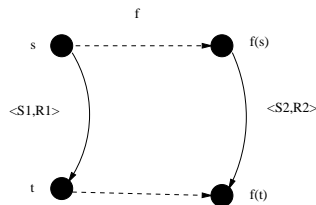
Nyt $\forall x \forall y R(x, y)$ on tosi kehyksessä $\langle S, R \rangle$ ja $\forall x \forall y R(x, y)$ on epätosi kehyksessä $\langle S', R' \rangle$, mutta kaikille lauseille P on voimassa: $\langle S, R \rangle \models P$ joss $\langle S', R' \rangle \models P$.

\implies Ei ole lausetta P siten, että P on pätevä kehyksessä $\langle S, R \rangle$ joss R :lle pätee $\forall x \forall y R(x, y)$.

3. Kehysten p-morfismi

Määritelmä. Kuvaus $f : \langle S_1, R_1 \rangle \mapsto \langle S_2, R_2 \rangle$ on p-morfismi joss

1. f kuvaa joukon S_1 joukolla S_2 surjektiivisesti siten, että jokaiselle $s \in S_2$ olemassa $t \in S_1$, jolle $s = f(t)$,
2. kaikille $s, t \in S_1$, jos sR_1t , niin $f(s)R_2f(t)$ ja
3. kaikille $s \in S_1$ ja $u \in S_2$, jos $f(s)R_2u$, niin on olemassa $t \in S_1$ siten, että sR_1t ja $f(t) = u$.



© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Kehysten p-morfismien ominaisuudet

Propositio. Jos on olemassa p-morfismi kehykseltä $\langle S_1, R_1 \rangle$ kehykselle $\langle S_2, R_2 \rangle$, niin jokainen ensimmäisessä kehyksessä pätevä lause on pätevä myös toisessa kehyksessä.

Esimerkki. (Jatkoa edelliseen esimerkkiin)

Nyt $\forall x \neg R(x, x)$ on tosi kehyksessä $\langle S_1, R_1 \rangle$ ja $\forall x \neg R(x, x)$ on epätosi kehyksessä $\langle S_2, R_2 \rangle$.

Kuitenkin jokaiselle lauseelle P : jos P on pätevä kehyksessä $\langle S_1, R_1 \rangle$, niin P on pätevä kehyksessä $\langle S_2, R_2 \rangle$.

\implies Ei ole lausetta P siten, että P on pätevä kehyksessä $\langle S, R \rangle$ joss R :lle pätee $\forall x \neg R(x, x)$.

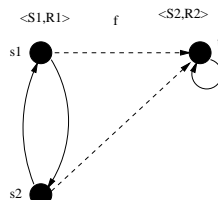
© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio


Esimerkki

Olkoon $\langle S_1, R_1 \rangle$ kehys, missä $S_1 = \{s_1, s_2\}$ ja $R_1 = \{\langle s_1, s_2 \rangle, \langle s_2, s_1 \rangle\}$.

Olkoon $\langle S_2, R_2 \rangle$ kehys, missä $S_2 = \{t\}$ ja $R_2 = \{\langle t, t \rangle\}$.

Määritellään kuvaus f siten, että $f(s_1) = f(s_2) = t$.



 Funktio f on p-morfismi.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

4. Looginen seuraavuus

- Lauselogiikassa looginen seuraavuus ($\Sigma \models P$) edellyttää, että P on tosi jokaisessa mallissa, jossa Σ on tosi.

- Modaalilogiikka tarjoaa useita mahdollisia tulkintoja:

- Kaikille malleille pätee, että P on tosi jokaisessa mallin maailmassa, jossa Σ on tosi.
- P on pätevä jokaisessa mallissa, jossa Σ on pätevä.
- P on pätevä jokaisessa kehyksessä, jossa Σ on pätevä.

- Otamme käyttöön loogisen seuraavuuden käsitteen, joka yhdistää kaikki nämä kolme tulkintaa.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Loogisen seuraavuuden määritelmä

Määritelmä. Olkoon L joukko kehyksiä, Σ ja Y lausejoukkoja ja P lause. Lause P seuraa loogisesti globaaleista premisseistä Σ ja lokaaleista premisseistä Y kehyslogiikassa L ($\Sigma \models_L Y \implies P$) joss jokaiselle joukon L kehukseen $\langle S, R \rangle$ perustuvalla mallilla $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, jossa $\mathcal{M} \models \Sigma$, ja jokaiselle sen maailmalle $s \in S$, jossa $\mathcal{M}, s \models Y$, pätee $\mathcal{M}, s \models P$.

Esimerkki. Olkoon L kaikkien kehysten joukko.

Jos $\Sigma \models_L \emptyset \implies P$, niin $\Sigma \models_L \emptyset \implies \Box P$.

Mutta $\{P\} \models_L \emptyset \implies \Box P$ ja $\emptyset \not\models_L \{P\} \implies \Box P$.

4. Deduktioteoreema

Lauselogiikan tapauksessa: $\Sigma \cup \{Q\} \models P$ joss $\Sigma \models Q \rightarrow P$.

Teoreema. (Paikallinen deduktioteoreema)

$\Sigma \models_L Y \cup \{Q\} \implies P$ joss $\Sigma \models_L Y \implies Q \rightarrow P$.

Määritelmä. Lauseelle P , $\Box^0 P = P$ ja $\Box^n P = \Box(\Box^{n-1} P)$.

Esimerkki. $\Box^3 P = \Box \Box \Box P$.

Globaali deduktioteoreema:

$\Sigma \cup \{Q\} \models_L Y \implies P$ joss jollekin n

$\Sigma \models_L Y \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \dots, \Box^n Q\} \implies P$.

(Tämä tulos ei päde kaikille kehysjoukoille L .)

Loogisen seuraavuuden ominaisuuksia

Määritelmä. Jos L_1 ja L_2 ovat kaksi kehysjoukkoa ja $L_2 \subseteq L_1$, sanomme, että L_1 on heikompi kuin L_2 ja kirjoitamme $L_1 \leq L_2$.

Jos L_1 on heikompi kuin L_2 , L_1 -pätevät lauseet ovat L_2 -päteviä.

Teoreema. (Monotonisuus) Olkoon $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, $Y_1 \subseteq Y_2$ ja $L_1 \leq L_2$.

Tällöin jos $\Sigma_1 \models_{L_1} Y_1 \implies P$, niin $\Sigma_2 \models_{L_2} Y_2 \implies P$.

Teoreema. (Korvattavuus) Olkoon Q ja Q' samat lauseet paitsi, että jossain paikoissa, joissa P on Q :n alilause, P' on Q' :n alilause. Tällöin

$\Sigma \cup \{P \leftrightarrow P'\} \models_L \emptyset \implies Q \leftrightarrow Q'$.

Huom. $\{\} \not\models_L \{P \leftrightarrow P'\} \implies \Box P \leftrightarrow \Box P'$.

Globaali deduktioteoreema ja kompaktius

Teoreema. (Globaali deduktioteoreema I)

Jos, jollekin n , $\Sigma \models_L Y \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \dots, \Box^n Q\} \implies P$, niin $\Sigma \cup \{Q\} \models_L Y \implies P$.

Teoreema. (Globaali deduktioteoreema II)

Olkoon L joukko kehyksiä, joka on suljettu generoitujen alikehysten ja ultraproduktioiden suhteen. Tällöin jos $\Sigma \cup \{Q\} \models_L Y \implies P$, niin $\Sigma \models_L Y \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \dots, \Box^n Q\} \implies P$ jollekin n .

Teoreema. (Kompaktius) Olkoon L joukko kehyksiä, joka on suljettu ultraproduktioiden suhteen. Jos $\Sigma \models_L Y \implies P$, niin on olemassa äärelliset joukot $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ ja $Y_0 \subseteq Y$ siten, että $\Sigma_0 \models_L Y_0 \implies P$.

(Tällä kurssilla ei käsitellä em. ultraproduktioehtoa vaan annetaan jatkossa esimerkkejä logiikoista, joille se pätee.)