ESIMERKKIMODAALILOGIIKKOJA

1. Kehyslogiikat
2. Modaalilogiikat $\mathbf{K}$ ja $\mathbf{T}$
3. Kehysten ominaisuudet
4. Lisää esimerkkejä ($\mathbf{K4}$, $\mathbf{S4}$, $\mathbf{KB}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{S5}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{D4}$ ja $\mathbf{DB}$)
5. Uskomisen logiikka
6. Deduktioteoreema ja kompaktius

M. Fitting: *Basic Modal Logic*, luvut 1.5 – 1.6 (s. 384 – 387).

1. Kehyslogiikat

Tarkastellaan esimerkkeinä kehyslogiikkoja, jotka perustuvat joukkoon $\mathbf{L}$ kehyksiä $\langle S,R\rangle$, missä relaation R ominaisuudet on valittu sopivasti.

Esimerkki. Refleksiivisten kehysten $\langle S,R\rangle$ joukko (R on refleksiivinen).

Olemme aiemmin todistaneet, että $\mathbf{L}$-pätevien lauseiden joukko muodostaa normaalin propositionaalisen modaalilogiikan $\mathbf{L}$, joka

1. sisältää kaikki tautologiat;
2. sisältää lauseen Q aina, kun siihen kuuluvat P ja $P \rightarrow Q$;
3. on suljettu sijoituksen suhteen;
4. sisältää muotoa $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$ olevat lauseet;
5. sisältää lauseen $\Box P$ aina, kun siihen kuuluu P.

Sijoitusesiintymät

Määritelmä. Jos Σ on joukko lauseita, $[\![\Sigma]\!]$ on joukkoon Σ kuuluvien lauseiden kaikkien sijoitusesiintymien joukko.

- Esim. Jos $\Sigma = \{P \rightarrow P\}$, $[\![\Sigma]\!]$ sisältää mm. lauseet

  $P \rightarrow P$, $\neg P \rightarrow \neg P$, $\Box\Box Q \rightarrow \Box\Box Q$ ja
  $(\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)) \rightarrow (\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)).$

- Jatkossa annetaan tietyille lauseille nimiä seuraavasti:

  $$\mathrm{I}\colon\ P \rightarrow P$$

- Nyt esim. lauseen I sijoitusesiintymien joukkoa merkitään $[\![\mathrm{I}]\!]$ ja tällä tarkoitetaan siis joukkoa $[\![\{P \rightarrow P\}]\!]$.

2. Modaalilogiikat $\mathbf{K}$ ja $\mathbf{T}$

- Olkoon $\mathbf{K}$ kaikkien kehysten joukko.
- Kehyslogiikka $\mathbf{K}$ on heikoin normaali modaalilogiikka:

  jos lause on $\mathbf{K}$-pätevä, se on myös $\mathbf{L}$-pätevä jokaiselle normaalille modaalilogiikalle $\mathbf{L}$.

- Karakteristinen lause:

  $$\mathrm{K}\colon\ \Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$$

Propositio. Jokainen joukon $[\![\mathrm{K}]\!]$ lause on $\mathbf{K}$-pätevä.

Todistus. Väite seuraa suoraan mahdollisten maailmojen semantiikan perusteoreeman 2. kohdasta. ∎

Modaalilogiikka T

Olkoon $\mathbf{T}$ kaikkien refleksiivisten kehysten joukko.

(Kehys $\langle S, R\rangle$ on refleksiivinen, jos $\forall x(xRx)$ on tosi kehyksessä).

- Esimerkiksi jos $\Box$ tarkoittaa tietämistä, kehysten refleksiivisyys on luontevaa: jos agentti tietää, että P, P on totta.
  - Olkoon $\langle S, R, v\rangle, s \Vdash \Box P$.
  - Jotta myös $\langle S, R, v\rangle, s \Vdash P$, riittää, että R on refleksiivinen:

    Jos $\langle S, R, v\rangle, s \Vdash \Box P$, kaikilla $t \in S$, joille sRt, $\langle S, R, v\rangle, t \Vdash P$.

    Kun R refleksiivinen, sRs ja $\langle S, R, v\rangle, s \Vdash P$.

Modaalilogiikka T

Modaalilogiikan $\mathbf{T}$ karakteristinen lause

$$\mathrm{T}\colon \Box P \rightarrow P$$

on pätevä kehyksessä $\langle S, R\rangle$ joss R on refleksiivinen.

$\Longrightarrow$ $\mathbf{T} = \mathbf{K} + [\![\mathrm{T}]\!]$

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Todistus. ($\Longleftarrow$) Olkoon $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Koska $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{K}$, $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Lauseet $[\![\mathrm{T}]\!]$ ovat $\mathbf{T}$-päteviä (ks. ed. luento).

Siis $\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Todistus (jatkoa)

($\Longrightarrow$) Oletetaan, että $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \not\models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

On olemassa malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ siten, että lauseet $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!]$ ovat päteviä tässä mallissa ja mallissa on maailma s, jossa $\langle S, R, v\rangle, s \Vdash \Upsilon \cup \{\neg P\}$.

Olkoon $R^* = R \cup \{\langle s, s\rangle \mid s \in S\}$. Osoitetaan, että jokaiselle lauseelle Q ja maailmalle $s \in S$: $\langle S, R, v\rangle, s \Vdash Q$ joss $\langle S, R^*, v\rangle, s \Vdash Q$ induktiolla lauseen Q rakenteen suhteen:

- Lause on atomilause Q: $\langle S, R, v\rangle, s \Vdash Q$ joss $\langle S, R^*, v\rangle, s \Vdash Q$.
- Lause on muotoa $\neg Q$:

  $\langle S, R, v\rangle, s \Vdash \neg Q$ joss $\langle S, R, v\rangle, s \not\Vdash Q$ joss (induktio-oletuksella)

  $\langle S, R^*, v\rangle, s \not\Vdash Q$ joss $\langle S, R^*, v\rangle, s \Vdash \neg Q$.

- Lause on muotoa $Q \rightarrow Q'$ (todistetaan kuten tapaus $\neg Q$).
- Lause on muotoa $\Box Q$:

  ($\Leftarrow$) Jos $\langle S, R, v\rangle, s \not\Vdash \Box Q$, on olemassa t, jolle sRt ja $\langle S, R, v\rangle, t \not\Vdash Q$. Induktio-oletuksella $\langle S, R^*, v\rangle, t \not\Vdash Q$.

  Nyt sR^*t ja $\langle S, R^*, v\rangle, s \not\Vdash \Box Q$.

  ($\Rightarrow$) Jos $\langle S, R^*, v\rangle, s \not\Vdash \Box Q$, on olemassa t, jolle sR^*t ja $\langle S, R^*, v\rangle, t \not\Vdash Q$.

  1. Jos $t \neq s$, sRt ja $\langle S, R, v\rangle, s \not\Vdash \Box Q$.
  2. Jos $t = s$, $\langle S, R^*, v\rangle, s \not\Vdash Q$ ja $\langle S, R, v\rangle, s \not\Vdash Q$ (ind. oletus).
     Koska $\Box Q \rightarrow Q$ on pätevä mallissa $\langle S, R, v\rangle$, $\langle S, R, v\rangle, s \not\Vdash \Box Q$.

Siis $\langle S, R^*, v\rangle \models \Sigma$ ja $\langle S, R^*, v\rangle, s \Vdash \Upsilon \cup \{\neg P\}$.

$\Longrightarrow$ $\Sigma \not\models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$, koska $\langle S, R^*\rangle$ on refleksiivinen kehys. ∎

3. Kehysten ominaisuuksia

Joitain ominaisuuksia ja vastaavia modaalilogiikan lauseita:

1. Refleksiivinen:

$\forall s(sRs)$ $\qquad \Box A \to A$

2. Symmetrinen:

$\forall s \forall t(sRt \to tRs)$ $\qquad A \to \Box\Diamond A$

3. Sarjallinen:

$\forall s \exists t(sRt)$ $\qquad \Box A \to \Diamond A$

4. Transitiivinen:

$\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge tRu \to sRu)$ $\qquad \Box A \to \Box\Box A$

5. Euklidinen:

$\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge sRu \to tRu)$ $\qquad \neg\Box A \to \Box\neg\Box A$

Kehysten ominaisuuksia (jatkoa)

6. Osittain funktionaalinen:

$\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge sRu \to t = u)$ $\qquad \Diamond A \to \Box A$

7. Funktionaalinen:

$\forall s \exists! t(sRt)$ $\qquad \Diamond A \leftrightarrow \Box A$

8. Heikosti tiheä:

$\forall s \forall t(sRt \to \exists u(sRu \wedge uRt))$ $\qquad \Box\Box A \to \Box A$

9. Heikosti kytketty:

$\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge sRu \to$ $\qquad \Box(A \wedge \Box A \to B) \vee$

$tRu \vee t = u \vee uRt)$ $\qquad \Box(B \wedge \Box B \to A)$

10. Heikosti suunnattu:

$\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge sRu \to \exists v(tRv \wedge uRv))$ $\qquad \Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$

Ominaisuuksien karakterisointi modaalilauseilla (I)

Teoreema. Olkoon $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$ jokin kehys. Tällöin kullekin ominaisuuksista 1–10, jos R täyttää ominaisuuden, niin vastaavan lauseen kaikki sijoitusesiintymät ovat päteviä $\mathcal{F}$:ssä.

Todistus. 2. Olkoon R symmetrinen. Osoitetaan $\langle S, R \rangle \models [\![A \to \Box\Diamond A]\!]$.

Vastaoletus: löytyy sijoitusesiintymä $A \to \Box\Diamond A$, jolle $\langle S, R \rangle \not\models A \to \Box\Diamond A$.
Tällöin löytyy malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ ja maailma $s \in S$, jossa $\mathcal{M}, s \Vdash A$ ja $\mathcal{M}, s \not\Vdash \Box\Diamond A$. Siis on olemassa t, jolle sRt ja $\mathcal{M}, t \not\Vdash \Diamond A$. Täten kaikilla t', tRt', $\mathcal{M}, t' \not\Vdash A$. Koska R:n symmetrinen, tRs ja $\mathcal{M}, s \not\Vdash A$, ristiriita. Siis vastaoletus ei päde ja $\langle S, R \rangle \models [\![A \to \Box\Diamond A]\!]$ pätee.
Loput kohdat samaan tapaan. ■

Ominaisuuksien karakterisointi modaalilauseilla (II)

Teoreema. Kun kehyksessä $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$ jonkin lauseista 1–10 kaikki sijoitusesiintymät ovat päteviä, niin R täyttää vastaavan ominaisuuden.

Todistus. 6. Osittainen funktionaalisuus vs. $\Diamond A \to \Box A$:

Olkoon $\langle S, R \rangle \models [\![\Diamond A \to \Box A]\!]$ ja tehdään vastaoletus, että R ei ole osittain funktionaalinen; eli $\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge sRu \to t = u)$ on epätosi.

Tällöin on olemassa $s, t, u \in S$ siten, että sRt, sRu, mutta $t \neq u$.

Valitaan v siten, että $v(t, P) = \text{true}$ ja $v(u, P) = \text{false}$ atomilauseelle P.
Nyt $\langle S, R, v \rangle, s \Vdash \Diamond P$ ja $\langle S, R, v \rangle, s \not\Vdash \Box P$. Siis $\langle S, R \rangle \not\models \Diamond P \to \Box P$.

Siis kaikki lauseen $\Diamond A \to \Box A$ sijoitusesiintymät eivät ole päteviä kehyksessä $\langle S, R \rangle$. Ristiriita alkuoletuksen kanssa.
Loput kohdat samaan tapaan. ■

4. Lisää esimerkkejä

Modaalilogiikka K4

- **K4** on transitiivisten kehysten joukko.
- Karakteristinen lause (positiivinen itsetutkiskelu):

$$4 : \Box P \rightarrow \Box\Box P$$

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{K4}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![4]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Modaalilogiikka S4

- **S4** on transitiivisten ja refleksiivisten kehysten joukko.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{S4}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![4]\!] \cup [\![T]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Esimerkkejä (jatkoa)

Modaalilogiikka KB

- **KB** on symmetristen kehysten joukko.
- Karakteristinen lause

$$B : P \rightarrow \Box\Diamond P$$

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{KB}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![B]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Modaalilogiikka B

- **B** on symmetristen ja refleksiivisten kehysten joukko.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{B}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![B]\!] \cup [\![T]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

$\Longrightarrow$ **KBT**

Modaalilogiikka S5

- **S5** on ekvivalenttisten (symmetristen, refleksiivisten ja transitiivisten) kehysten joukko.
- Karakteristinen lause (negatiivinen itsetutkiskelu):

$$5 : \neg\Box P \rightarrow \Box\neg\Box P$$

Propositio.

$\Sigma \models_{\mathbf{S5}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![T]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![B]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![T]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![5]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![T]\!] \cup [\![5]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

$\Longrightarrow$ Välttämättömyyden ja ideaalisen tietämisen logiikka.

Sarjallisia modaalilogiikkoja

Modaalilogiikka D

- **D** on sarjallisten kehysten joukko.
- Karakteristinen lause $D : \Box P \rightarrow \Diamond P$

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{D}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![D]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Modaalilogiikka D4

- **D4** on sarjallisten ja transitiivisten kehysten joukko.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{D4}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![D]\!] \cup [\![4]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Modaalilogiikka DB

- **DB** on sarjallisten ja symmetristen kehysten joukko.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{DB}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![D]\!] \cup [\![B]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

5. Uskomisen logiikka

- Se mitä uskotaan ei ole välttämättä totta, joten uskomisen logiikassa kehykset eivät ole välttämättä refleksiivisiä.
- Jos lähtökohdaksi positiivinen ja negatiivinen itsetutkiskelu, saadaan modaalilogiikka **K45**.

  Mutta $\neg\Box\bot$ ei ole **K45**-pätevä: $\langle\{s\},\emptyset,v\rangle,s \Vdash \Box\bot$.
- Vaaditaan lisäksi sarjallisuus $\Longrightarrow$ Modaalilogiikka **KD45** (sarjalliset, transitiiviset ja euklidiset kehykset).

Huom. Transitiivisuus ei ole redundanttia: $\Box P \rightarrow \Box\Box P$ ei ole pätevä sarjallisten ja euklidisten kehysten joukossa (**KD5**-pätevä).

Uskomisen logiikka

- Lause $\neg\Box\bot$ on **KD45**-pätevä (sarjallisuudesta johtuen).
- Lause $\Box P \rightarrow P$ ei ole **KD45**-pätevä.
- Lause $\Box(\Box P \rightarrow P)$ on **KD45**-pätevä.

Todistus. Olkoon $\langle S,R\rangle$ **KD45**-kehys.

Olkoon $s \in S$ ja sRt (tällainen $t \in S$ on aina olemassa).

Euklidisuuden nojalla: tRt (sRt ja sRt).

Joten kaikilla t, joille sRt, myös tRt.

Täten $\langle S,R,v\rangle,s \Vdash \Box(\Box P \rightarrow P)$,

koska kaikilla t, joilla sRt, $\langle S,R,v\rangle,t \Vdash \Box P \rightarrow P$. ■

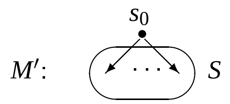
Yksinkertaisempi kehysluokka: S5 ja KD45

- Modaalilogiikan **S5** kehyksiksi riittävät *universaalikehykset*, so. kehykset $\langle S,R\rangle$, joissa $R = \{\langle s,t\rangle \mid s,t \in S\}$.

Propositio. Jos lause P on tosi **S5**-kehykseen perustuvassa mallissa, P on tosi myös universaalikehykseen perustuvassa mallissa.

Propositio. Jos lause P on tosi **KD45**-kehykseen perustuvassa mallissa, P on tosi mallissa muotoa

$$M' = \langle\{s_0\}\cup S, \{\langle s,t\rangle \mid s \in \{s_0\}\cup S, t \in S\}, v\rangle.$$



6. Deduktioteoreema ja kompaktius

- Kaikille em. logiikoista pätee globaali deduktioteoreema:

  $\Sigma\cup\{Q\} \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss

  jollekin n pätee $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon\cup\{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \ldots, \Box^n Q\} \Longrightarrow P$.
- Nämä logiikat ovat lisäksi kompakteja:

  Jos $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$, niin on olemassa äärelliset joukot $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon_0 \subseteq \Upsilon$ siten, että $\Sigma_0 \models_{\mathbf{L}} \Upsilon_0 \Longrightarrow P$.
- Näitä ominaisuuksia ei kuitenkaan ole kaikilla modaalilogiikoilla eikä edes kehyslogiikoilla.

Modaalilogiikka GL

- **GL** on transitiivisten, irrefleksiivisten ja äärellisten kehysten joukko (tai transitiivisten kehysten joukko, joissa ei ole ääretöntä ketjua saavutettavia maailmoja).
- Tämä ei vastaa mitään (ensimmäisen kertaluvun) predikaattilogiikan lauseella ilmaistavaa kehysten ominaisuutta.
- Karakteristinen lause

$$\mathrm{GL} : \Box(\Box P \to P) \to \Box P$$

- Globaali deduktioteoreema ei päde eikä **GL** ole kompakti.

Propositio. Jos Σ ja Υ ovat äärellisiä lausejoukkoja, $\Sigma \models_{\mathbf{GL}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{GL}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.