TAULUMENETELMÄ MODAALILOGIIKOILLE

1. Taulumenetelmä modaalilogiikalle $\mathbf{K}$
2. Virheettömyys
3. Täydellisyys
4. Muut modaalilogiikat
5. Looginen seuraavuus

M. Fitting: *Basic Modal Logic*, luku 1.9 (s. 396 – 403).

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

1. Taulumenetelmä modaalilogiikalle $\mathbf{K}$

- **Motivaatio**: Hilbert-tyylisiä todistuksia on usein vaikea löytää. Käytössä Modus Ponens -sääntö: jotta voidaan johtaa Q, täytyy johtaa P ja $P \to Q$. Mutta mikä on sopiva P?

  Esimerkki. Onko $\{A \to B,\ A \to C\} \models A \to (B \wedge C)$?

  1. $A \to B$
  2. $A \to C$

  $\ldots$

  $n.$ $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$

- **Alikaavaperiaate:** lauseen Q todistuksessa tarvitaan vain Q:n alikaavoja $\Longrightarrow$ resoluutio, sekventtikalkyyli, taulumenetelmä.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Mahdollisten maailmojen nimeäminen

- Tavoitteena on nimetä mahdolliset maailmat käyttäen prefiksejä siten, että saavutettavuusrelaatio voidaan päätellä nimistä suoraan.
- Prefiksi on mikä tahansa ei-tyhjä, äärellinen jono luonnollisia lukuja, kuten esim. $\langle 1 \rangle$ tai $\langle 11, 1, 1, 1, 111, 2 \rangle$.
- Prefiksoitu lause on muotoa σP, missä σ on prefiksi ja P lause. (Idea: lause P on tosi maailmassa nimeltä σ.)
  Esimerkkejä: $\langle 1 \rangle (P \vee \neg P)$ ja $\langle 11, 1, 1, 111, 2 \rangle \Box\Box\Diamond P$.
- Merkintä: σn on prefiksi, joka saadaan prefiksistä σ liittämällä sen perään luku n. Esim. jos $\sigma = \langle 1 \rangle$, $\sigma 11 = \langle 1, 11 \rangle$.
- Prefiksi muotoa σn on $\mathbf{K}$-saavutettavissa prefiksistä σ.
  Esim. $\langle 1, 11, 11 \rangle$ on $\mathbf{K}$-saavutettavissa prefiksistä $\langle 1, 11 \rangle$.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Taulusäännöt

Modaalilogiikan taulumenetelmä koostuu lauselogiikan säännöistä ja modaalisäännöistä.

- Lauselogiikan säännöt prefiksoiduille lauseille (lauselogiikan α- ja β-säännöt ks. kertausluento):

$$\frac{\sigma \neg\neg P}{\sigma P} \qquad \frac{\sigma \alpha}{\begin{array}{c}\sigma \alpha_1 \\ \sigma \alpha_2\end{array}} \qquad \frac{\sigma \beta}{\sigma \beta_1 \mid \sigma \beta_2}$$

Huom. Prefiksi σ ei muutu.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Esimerkki

Sovelletaan lauselogiikan sääntöjä prefiksoituun lauseeseen $\langle 3,2,1\rangle\neg((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P)$:

1. $\langle 3,2,1\rangle\neg((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P)$
2. $\langle 3,2,1\rangle(\neg P \rightarrow Q)$ (1)
3. $\langle 3,2,1\rangle\neg P$ (1)

4. $\langle 3,2,1\rangle\neg\neg P$ (2)	5. $\langle 3,2,1\rangle Q$ (2)
6. $\langle 3,2,1\rangle P$ (4)	
$\times$	

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Prefiksien esiintymät

Määritelmä. Prefiksi on taulun haarassa

(i) tarjolla, jos se esiintyy haarassa, ja

(ii) rajoittamaton, jos ei ole minkään haarassa esiintyvän prefiksin alkuosa.

Esimerkki. Prefiksi $\langle 1,1\rangle$ on prefiksien $\langle 1,1,12,3\rangle$ ja $\langle 1,1\rangle$ alkuosa.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Modaalisäännöt

Modaalisäännöt ovat seuraavat:

$\Box$-sääntö: $$\frac{\sigma\Box P}{\sigma n P}$$

mille tahansa tarjolla olevalle prefiksille σn.

$\neg\Box$-sääntö: $$\frac{\sigma\neg\Box P}{\sigma n\neg P}$$

jollekin rajoittamattomalle prefiksille σn.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Esimerkki

1. $\langle 1\rangle\neg(\Box P \rightarrow \Box\Box P)$
2. $\langle 1\rangle\Box P$ (1)
3. $\langle 1\rangle\neg\Box\Box P$ (1)
4. $\langle 1,1\rangle\neg\Box P$ (3)
5. $\langle 1,1\rangle P$ (2)
6. $\langle 1,1,1\rangle\neg P$ (4)
7. $\langle 1,2\rangle\neg\Box P$ (3)
8. $\langle 1,2,3\rangle\neg P$ (7)
9. $\langle 1,2\rangle P$ (2)

$\vdots$

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Taulutodistukset

Määritelmä.

- Taulun haara on suljettu, jos se sisältää
  1. prefiksoidut lauseet σP ja $\sigma \neg P$
     jollekin lauseelle P ja prefiksille σ; tai
  2. prefiksoidun lauseen $\sigma \bot$; tai
  3. prefiksoidun lauseen $\sigma \neg \top$.
- Taulu on suljettu, jos jokainen sen haara on suljettu.
- Lauseen P todistus on taulu, jonka juuressa on prefiksoitu lause $\langle 1 \rangle \neg P$ ja joka on suljettu.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Esimerkki

Taulutodistus lauseelle $\Box(P \land Q) \to (\Box P \land \Box Q)$:

1. $\langle 1 \rangle \neg(\Box(P \land Q) \to (\Box P \land \Box Q))$
2. $\langle 1 \rangle \Box(P \land Q)$ (1)
3. $\langle 1 \rangle \neg(\Box P \land \Box Q)$ (1)

4.	$\langle 1 \rangle \neg\Box P$	(3)	5.	$\langle 1 \rangle \neg\Box Q$	(3)
6.	$\langle 1,2 \rangle \neg P$	(4)	10.	$\langle 1,3 \rangle \neg Q$	(5)
7.	$\langle 1,2 \rangle P \land Q$	(2)	11.	$\langle 1,3 \rangle P \land Q$	(2)
8.	$\langle 1,2 \rangle P$	(7)	12.	$\langle 1,3 \rangle P$	(11)
9.	$\langle 1,2 \rangle Q$	(7)	13.	$\langle 1,3 \rangle Q$	(11)
	$\times$			$\times$	

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Esimerkki

Taulutodistus lauseelle $\top \leftrightarrow \Box\top$:

1. $\langle 1 \rangle \neg(\top \leftrightarrow \Box\top)$

2.	$\langle 1 \rangle \neg\top$	(1)	4.	$\langle 1 \rangle \top$	(1)
3.	$\langle 1 \rangle \Box\top$	(1)	5.	$\langle 1 \rangle \neg\Box\top$	(1)
	$\times$		6.	$\langle 1,2 \rangle \neg\top$	(5)
				$\times$	

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

2. Virheettömyys

Teoreema. Jos lauseelle P löytyy todistus, lause P on $\mathbf{K}$-pätevä.

Todistus. (Seuraavien osatulosten avulla)

- Määritellään taululle $\mathbf{K}$-toteutuvuus: taulu on $\mathbf{K}$-toteutuva, jos sen jokin haara vastaa tietyllä tapaa mallia.
- Osoitetaan, että
  (i) $\mathbf{K}$-toteutuva taulu ei voi olla suljettu.
  (ii) Jos P ei ole $\mathbf{K}$-pätevä, taulu $\langle 1 \rangle \neg P$ on $\mathbf{K}$-toteutuva.
  (iii) Jokainen sääntö säilyttää $\mathbf{K}$-toteutuvuuden: jos taulu on $\mathbf{K}$-toteutuva ennen säännön soveltamista, se on $\mathbf{K}$-toteutuva myös säännön soveltamisen jälkeen.

Täten, jos P ei ole $\mathbf{K}$-pätevä, lauseen P taulu säilyy avoimena. ■

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

K-toteutuvuus

Määritelmä.

- Taulu on $\mathbf{K}$-toteutuva, jos joku sen haaroista on $\mathbf{K}$-toteutuva.
- Taulun haara on $\mathbf{K}$-toteutuva, jos haarassa esiintyvien prefiksoitujen lauseiden joukko on $\mathbf{K}$-toteutuva.
- Prefiksoitujen lauseiden joukko Σ on $\mathbf{K}$-toteutuva, jos löytyy malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ ja kuvaus $\mathcal{N}$ joukossa Σ esiintyvistä prefikseistä joukolle S siten, että
  1. Jos prefiksit σ ja τ esiintyvät joukossa Σ ja τ on $\mathbf{K}$-saavutettavissa prefiksistä σ, tällöin $\mathcal{N}(\sigma) R \mathcal{N}(\tau)$.
  2. Jos $\sigma P \in \Sigma$, niin $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \Vdash P$.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Todistuksen yksityiskohtia

Edellisen määritelmän nojalla voidaan todeta seuraavaa:

(i) $\mathbf{K}$-toteutuva taulu ei voi olla suljettu.

(ii) Jos lause P ei ole $\mathbf{K}$-pätevä, taulu $\langle 1 \rangle \neg P$ on $\mathbf{K}$-toteutuva.

(ii) pätee koska jos lause P ei ole $\mathbf{K}$-pätevä, sille löytyy vastamalli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, jonka jossain maailmassa $s \in S$, $\mathcal{M}, s \Vdash \neg P$. Siis taulu $\{\langle 1 \rangle \neg P\}$ on $\mathbf{K}$-toteutuva kuvauksella $\mathcal{N}(\langle 1 \rangle) = s$.

(iii) Olkoon taulu Γ $\mathbf{K}$-toteutuva. Taulussa Γ on haara, jonka lauseet Σ ovat $\mathbf{K}$-toteutuvia mallilla $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ ja kuvauksella $\mathcal{N}$. Osoitetaan, että kun sovelletaan mitä tahansa taulusääntöä, näin saatava taulu Γ' on myös $\mathbf{K}$-toteutuva.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Taulusäännöt säilyttävät K-toteutuvuuden

Sovelletaan taulusääntöä $\mathbf{K}$-toteutuvaan haaraan (olkoon Σ vastaava prefiksoitu lausejoukko):

- $$\frac{\sigma\beta}{\sigma\beta_1 \mid \sigma\beta_2}$$
  Tällöin taulussa Γ' on haarat, joiden prefiksoidut lausejoukot ovat $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\sigma\beta_1\}$ ja $\Sigma_2 = \Sigma \cup \{\sigma\beta_2\}$.

  Koska $\sigma\beta \in \Sigma$, seuraa $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \Vdash \beta$,

  joten $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \Vdash \beta_1$ tai $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \Vdash \beta_2$.

  $\Longrightarrow$ Γ' on $\mathbf{K}$-toteutuva.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

- $$\frac{\sigma\alpha}{\begin{array}{c}\sigma\alpha_1 \\ \sigma\alpha_2\end{array}}$$
  Käsitellään samaan tapaan; lausejoukkona $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\sigma\alpha_1, \sigma\alpha_2\}$.

- $$\frac{\sigma\Box P}{\sigma n P}$$ tarjolla olevalle prefiksille σn.

  Tällöin taulussa Γ' haara, jonka lausejoukko $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\sigma n P\}$.

  Koska $\sigma\Box P \in \Sigma$, seuraa $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \Vdash \Box P$, joten kaikille t,

  $\mathcal{N}(\sigma) R t$, $\mathcal{M}, t \Vdash P$.

  Koska σn on $\mathbf{K}$-saavutettavissa σ:sta, $\mathcal{N}(\sigma) R \mathcal{N}(\sigma n)$. Siis $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma n) \Vdash P$.

  $\Longrightarrow$ Γ' on $\mathbf{K}$-toteutuva.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

- $$\frac{\sigma\neg\Box P}{\sigma n \neg P}$$ jollekin rajoittamattomalle prefiksille σn.

  Tällöin taulussa Γ' haara, jonka lausejoukko $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\sigma n \neg P\}$.

  Koska $\sigma\neg\Box P \in \Sigma$, seuraa $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \mid\!\Vdash \neg\Box P$, joten on olemassa t, jolle $\mathcal{N}(\sigma) R t$ ja $\mathcal{M}, t \mid\!\Vdash \neg P$.

  Koska σn ei ole mikään Σ prefiksin alkuosa, kuvausta $\mathcal{N}$ voidaan laajentaa: $\mathcal{N}(\sigma n) = t$. Tällöin $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma n) \mid\!\Vdash \neg P$.

  $\Longrightarrow$ Γ' on $\mathbf{K}$-toteutuva.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

3. Täydellisyys

- Miten taata, että jokaiselle pätevälle lauseelle löytyy taulutodistus, kun taulun haarat voivat olla äärettömiä?
- Milloin sääntöjä on sovellettu riittävästi/reilusti?
- Taulun rakentamiseen tarvitaan systemaattinen menetelmä, jossa kaikkia sääntöjä on käytetty riittävästi eli jokaiselle avoimelle haaralle θ pätee:

  (i) Jos $\sigma\neg\neg P \in \theta$, tällöin $\sigma P \in \theta$.

  (ii) Jos $\sigma\beta \in \theta$, tällöin $\sigma\beta_1 \in \theta$ tai $\sigma\beta_2 \in \theta$.

  (iii) Jos $\sigma\alpha \in \theta$, tällöin $\sigma\alpha_1 \in \theta$ ja $\sigma\alpha_2 \in \theta$.

  (iv) Jos $\sigma\neg\Box Q \in \theta$, $\sigma n \neg Q \in \theta$, jollakin n.

  (v) Jos $\sigma\Box Q \in \theta$, $\sigma n Q \in \theta$ kaikilla σn, jotka tarjolla θ:ssa.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Huomattavaa

- Systemaattinen menetelmä takaa täydellisyyden mutta voi sallia äärettömät taulut, mikäli todistettava lause ei ole pätevä.
- **Ratkaisumenetelmä** takaisi, että taulun rakentaminen päättyy äärellisellä askelmäärällä, olipa todistettava lause pätevä tai ei.
- Palaamme ratkeavuuskysymykseen myöhemmin.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Systemaattinen $\mathbf{K}$-taulu lauseelle P:

1. Merkitään taulun juureen $\langle 1 \rangle \neg P$.

2. Kunnes taulu on suljettu tai kaikki lauseet on merkitty käytetyiksi:

2.1 Valitaan taulusta ylin käyttämätön solmu σQ.

2.2 Jos Q ei ole literaali, suoritetaan jokaiselle avoimelle σQ kautta kulkevalle haaralle θ jokin seuraavista:

- Jos σQ muotoa $\sigma\alpha$, jatketaan haaraa θ solmuilla $\sigma\alpha_1$ ja $\sigma\alpha_2$.
- Jos σQ on muotoa $\sigma\beta$, lisätään haaran θ loppuun kaksi lapsisolmua $\sigma\beta_1$ ja $\sigma\beta_2$ (haarautuminen).
- Jos σQ on muotoa $\sigma\neg\Box P$, lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n \neg P$ jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle σn.
- Jos σQ on muotoa $\sigma\Box P$, kaikille tässä haarassa tarjolla oleville σn lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n P$ sekä $\boxed{\text{lisäksi solmu } \sigma\Box P}$.

2.3 Merkitään σQ käytetyksi.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Teoreema. (**Täydellisyys**) Jos P on $\mathbf{K}$-pätevä, lauseen P systemaattinen $\mathbf{K}$-taulu sulkeutuu.

Todistus. Osoitetaan, että jos lauseen P systemaattisessa $\mathbf{K}$-taulussa on avoin haara, P ei ole $\mathbf{K}$-pätevä. Olkoon θ tällainen haara ja $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ seuraava malli (vastamalli):

1. S on θ:ssa esiintyvien prefiksien joukko.
2. $\sigma R \tau$ joss τ on $\mathbf{K}$-saavutettavissa σ:sta.
3. $v(\sigma, Q) = \mathrm{true}$ joss σQ esiintyy θ:ssa atomilauseelle Q.

Teoreeman todistamiseen riittää nyt seuraava aputulos:

$$\text{jos } \sigma Q \in \theta, \text{ niin } \mathcal{M}, \sigma \Vdash Q.$$

Syynä tähän on, että $\langle 1\rangle \neg P$ kuuluu jokaiseen haaraan, jolloin $\mathcal{M}, \langle 1\rangle \Vdash \neg P$. Tämä tarkoittaa, että P ei ole $\mathbf{K}$-pätevä. ■

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Induktiotodistus

Todistetaan kaikille prefiksoiduille lauseille σQ, että

$$\text{jos } \sigma Q \in \theta, \text{ niin } \mathcal{M}, \sigma \Vdash Q.$$

Todistus. Käytetään induktiota lauseen Q pituuden suhteen.

- (Q atomilause) Jos $\sigma Q \in \theta$, niin $v(\sigma, Q) = \mathrm{true}$ ja $\mathcal{M}, \sigma \Vdash Q$.
- (Q atomilauseen negaatio) Jos $\sigma \neg Q' \in \theta$ ja Q' on atomilause, niin $\sigma Q' \notin \theta$, joten $\mathcal{M}, \sigma \nVdash Q'$ ja $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \neg Q'$.

Induktiohypoteesi [IH]:

Jos Q on lyhyempi kuin j ja $\sigma Q \in \theta$, tällöin $\mathcal{M}, \sigma \Vdash Q$.

Olkoon lauseen Q pituus j. Nyt Q on muodoltaan jokin seuraavista:

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

- (Muotoa $\neg\neg Q$) Jos $\sigma\neg\neg Q \in \theta$, tällöin $\sigma Q \in \theta$. [IH] $\mathcal{M}, \sigma \Vdash Q$. Täten $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \neg\neg Q$.
- (β-lause) Jos $\sigma\beta \in \theta$, tällöin $\sigma\beta_1 \in \theta$ tai $\sigma\beta_2 \in \theta$. [IH] $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \beta_1$ tai $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \beta_2$. Täten $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \beta$.
- (α-lause) Jos $\sigma\alpha \in \theta$, tällöin $\sigma\alpha_1 \in \theta$ ja $\sigma\alpha_2 \in \theta$. [IH] $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \alpha_1$ ja $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \alpha_2$. Täten $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \alpha$.
- (Muotoa $\neg\Box Q$) Jos $\sigma\neg\Box Q \in \theta$, $\sigma n \neg Q \in \theta$ jollakin n. [IH] $\mathcal{M}, \sigma n \Vdash \neg Q$. Siis $\mathcal{M}, \sigma \nVdash \Box Q$, koska $\sigma R \sigma n$.
- (Muotoa $\Box Q$) Jos $\sigma\Box Q \in \theta$, $\sigma n Q \in \theta$ kaikilla σn, jotka tarjolla θ:ssa. [IH] $\mathcal{M}, \sigma n \Vdash Q$. Täten $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \Box Q$.

Siis jokaiselle avoimelle haaralle θ, prefiksille σ ja lauseelle Q: jos $\sigma Q \in \theta$, niin $\mathcal{M}, \sigma \Vdash Q$. ■

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Esimerkki. Tutkitaan, onko $\Box P \rightarrow \Box\Box P$ $\mathbf{K}$-pätevä. Rakennetaan systemaattinen $\mathbf{K}$-taulu:

1.	$\langle 1\rangle \neg(\Box P \rightarrow \Box\Box P)$	
2.	$\langle 1\rangle \Box P$	(1)
3.	$\langle 1\rangle \neg\Box\Box P$	(1)
4.	$\langle 1\rangle \Box P$	(2)
5.	$\langle 1,2\rangle \neg\Box P$	(3)
6.	$\langle 1,2\rangle P$	(4)
7.	$\langle 1\rangle \Box P$	(4)
8.	$\langle 1,2,3\rangle \neg P$	(5)
9.	$\langle 1,2\rangle P$	(7)
10.	$\langle 1\rangle \Box P$	(7)
	$\ldots$	

Koska taulu ei sulkeudu, voidaan avoimesta haarasta koota *vastamalli* $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{\langle 1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,2,3\rangle\}$ $R = \{\langle\langle 1\rangle, \langle 1,2\rangle\rangle, \langle\langle 1,2\rangle, \langle 1,2,3\rangle\rangle\}$ ja $v(\sigma, P) = \mathrm{true}$ joss $\sigma = \langle 1,2\rangle$. Nyt $\mathcal{M}, \langle 1\rangle \nVdash \Box P \rightarrow \Box\Box P$.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

4. Muut modaalilogiikat

- Laajennetaan edellä esitetty taulumenetelmä käsittelemään myös muita modaalilogiikoita kuin $\mathbf{K}$.

  Määritelmä. Prefiksi τ on prefiksin σ yksinkertainen jatko, jos τ on muotoa σn jollekin luonnolliselle luvulle n.

- Taulumenetelmä modaalilogiikalle $\mathbf{L}$:

  $\neg\Box$-sääntö:

$$\frac{\sigma \neg \Box P}{\tau \neg P} \qquad \frac{\sigma \Diamond P}{\tau P}$$

  missä τ on haarassa rajoittamaton prefiksin σ yksinkertainen jatko.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Taulumenetelmä modaalilogiikalle $\mathbf{L}$

- **$\Box$-sääntö**:

$$\frac{\sigma \Box P}{\tau P} \qquad \frac{\sigma \neg \Diamond P}{\tau \neg P}$$

  missä τ $\mathbf{L}$-saavutettavissa prefiksistä σ ja

  1. logiikoille $\mathbf{K}, \mathbf{KB}, \mathbf{K4}$ (huom. ei-sarjallisia)
     τ on tarjolla haarassa;
  2. logiikoille $\mathbf{D}, \mathbf{T}, \mathbf{DB}, \mathbf{B}, \mathbf{D4}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$ (huom. sarjallisia)
     (a) τ on tarjolla haarassa tai
     (b) τ on rajoittamaton prefiksin σ yksinkertainen jatko.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Prefiksien välinen saavutettavuus

Prefiksien välisen $\mathbf{L}$-saavutettavuuden määrittelyä varten tarvitaan muutama prefiksien saavutettavuuteen liittyvä käsite.

Määritelmä. Prefiksien välinen saavutettavuusrelaatio on

1. yleinen, jos σn on saavutettavissa prefiksistä σ kaikilla n;
2. käänteinen, jos σ on saavutettavissa prefiksistä σn kaikilla n;
3. refleksiivinen, jos σ on saavutettavissa σ:sta;
4. transitiivinen, jos τ on saavutettavissa prefiksistä σ aina, kun σ on τ:n aito alkuosa.
5. universaalinen, jos prefiksi on saavutettavissa mistä tahansa prefiksistä.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Prefiksien välinen saavutettavuus (jatkoa)

Saavutettavuus tiettyjen logiikkojen tapauksessa:

Logiikka $\mathbf{L}$	$\mathbf{L}$-saavutettavuus
$\mathbf{K}, \mathbf{D}$	yleinen
$\mathbf{T}$	yleinen, refleksiivinen
$\mathbf{KB}, \mathbf{DB}$	yleinen, käänteinen
$\mathbf{B}$	yleinen, refleksiivinen, käänteinen
$\mathbf{K4}, \mathbf{D4}$	yleinen, transitiivinen
$\mathbf{S4}$	yleinen, refleksiivinen, transitiivinen
$\mathbf{S5}$	universaali

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Esimerkki: D-pätevyys

Haetaan **D**-taulutodistus lauseelle $\Box P \to \neg\Box\neg P$:

1.	$\langle 1\rangle \neg(\Box P \to \neg\Box\neg P)$	
2.	$\langle 1\rangle \Box P$	(1)
3.	$\langle 1\rangle \neg\neg\Box\neg P$	(1)
4.	$\langle 1\rangle \Box\neg P$	(3)
5.	$\langle 1,2\rangle \neg P$	(4) Huom. 2. (b)
6.	$\langle 1,2\rangle P$	(2)

$\times$

(**D**-saavutettavuus: yleinen)

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Esimerkki: T-pätevyyys

Muodostetaan **T**-taulutodistus lauseelle $\Box P \to P$:

1.	$\langle 1\rangle \neg(\Box P \to P)$	
2.	$\langle 1\rangle \Box P$	(1)
3.	$\langle 1\rangle \neg P$	(1)
4.	$\langle 1\rangle P$	(2) Huom. refleksiivisyys

$\times$

(**T**-saavutettavuus: yleinen ja refleksiivinen)

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Esimerkki: K4-pätevyys

Haetaan **K4**-taulutodistus lauseelle $\Box P \to \Box\Box P$:

1.	$\langle 1\rangle \neg(\Box P \to \Box\Box P)$	
2.	$\langle 1\rangle \Box P$	(1)
3.	$\langle 1\rangle \neg\Box\Box P$	(1)
4.	$\langle 1,2\rangle \neg\Box P$	(3)
5.	$\langle 1,2,3\rangle \neg P$	(4)
6.	$\langle 1,2,3\rangle P$	(2) Huom. transit.

$\times$

(**K4**-saavutettavuus: yleinen ja transitiivinen)

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Esimerkki: KB-pätevyys

Etsitään **KB**-taulutodistus lauseelle $P \to \Box\Diamond P$:

1.	$\langle 1\rangle \neg(P \to \Box\Diamond P)$	
2.	$\langle 1\rangle P$	(1)
3.	$\langle 1\rangle \neg\Box\Diamond P$	(1)
4.	$\langle 1,2\rangle \neg\Diamond P$	(3)
5.	$\langle 1\rangle \neg P$	(4) Huom. käänteisyys

$\times$

(**KB**-saavutettavuus: yleinen ja käänteinen)

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Systemaattinen L-taulu lauseelle P:

Muutetaan systemaattisen $\mathbf{K}$-taulun kohtaa 2.2: Jos Q ei ole literaali, suoritetaan jokaiselle avoimelle σQ kautta kulkevalle haaralle θ:

- Jos σQ on muotoa $\sigma\neg\Box P$ ($\sigma\Diamond P$), lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n\neg P$ ($\sigma n P$) jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle σn.
- Jos σQ on muotoa $\sigma\Box P$ ($\sigma\neg\Diamond P$),
  (a) kun $\mathbf{L}$ on $\mathbf{K}, \mathbf{KB}, \mathbf{K4}, \mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$:
  jokaiselle θ:ssa tarjolla olevalle σ', joka on $\mathbf{L}$-saavutettavissa σ:sta, lisätään θ:n loppuun solmu $\sigma' P$ ($\sigma'\neg P$) ja lopuksi $\sigma\Box P$ ($\sigma\neg\Diamond P$).
  (b) kun $\mathbf{L}$ on $\mathbf{D}, \mathbf{DB}, \mathbf{D4}$:
  jokaiselle θ:ssa tarjolla olevalle σ', joka on $\mathbf{L}$-saavutettavissa σ:sta, lisätään θ:n loppuun solmu $\sigma' P$ ($\sigma'\neg P$). Jos tällaisia prefiksejä σ' ei ole, lisätään θ:n loppuun solmu $\sigma n P$ ($\sigma n\neg P$) jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle σn. Kummassakin tapauksessa lisätään vielä haaran loppuun $\sigma\Box P$ ($\sigma\neg\Diamond P$).

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

S5-taulut

- Modaalilogiikassa $\mathbf{S5}$ mallien saavutettavuusrelaatio on ekvivalenssirelaatio (universaali saavutettavuus) ja riittää käsitellä universaalikehyksiä (ks. ML-4).
- Prefikseiksi riittävät luonnolliset luvut.

$\neg\Box$-sääntö: $\dfrac{n\neg\Box P}{k\neg P}$ $\qquad$ $\dfrac{n\Diamond P}{kP}$

missä k ei esiinny haarassa.

$\Box$-sääntö: $\dfrac{n\Box P}{kP}$ $\qquad$ $\dfrac{n\neg\Diamond P}{k\neg P}$

mille tahansa k.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Esimerkki: S5-pätevyys

Haetaan $\mathbf{S5}$-taulutodistus lauseelle $\neg\Box P \rightarrow \Box\neg\Box P$:

1.	$1\neg(\neg\Box P \rightarrow \Box\neg\Box P)$	
2.	$1\neg\Box P$	(1)
3.	$1\neg\Box\neg\Box P$	(1)
4.	$2\neg P$	(2)
5.	$3\neg\neg\Box P$	(3)
6.	$3\Box P$	(5)
7.	$2P$	(6)

$\times$

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Systemaattinen S5-taulu lauseelle P:

1. Merkitään taulun juureen $1\neg P$.
2. Kunnes taulu on suljettu tai kaikki lauseet on merkitty käytetyiksi:

2.1 Valitaan taulusta ylin käyttämätön solmu nQ.

2.2 Jos Q ei ole literaali, suoritetaan jokaiselle avoimelle nQ kautta kulkevalle haaralle θ:

- Jos nQ muotoa $n\alpha$, jatketaan haaraa θ solmuilla $n\alpha_1$ ja $n\alpha_2$.
- Jos nQ on muotoa $n\beta$, lisätään haaran θ loppuun kaksi lapsisolmua $n\beta_1$ ja $n\beta_2$ (haarautuminen).
- Jos nQ on muotoa $n\neg\Box P$, lisätään haaran θ loppuun solmu $k\neg P$ jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle k sekä tämän jälkeen kX kullekin haarassa esiintyvälle $j\Box X$.
- Jos nQ on muotoa $n\Box P$, kaikille tässä haarassa tarjolla oleville k lisätään haaran θ loppuun solmu kP.

2.3 Merkitään nQ käytetyksi.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

KD45-taulut

- Modaalilogiikassa $\mathbf{KD45}$ riittää käsitellä malleja, jotka ovat muotoa (ks. ML-4):

$$M = \langle \{s_0\} \cup S, \{\langle s, t\rangle \mid s \in \{s_0\} \cup S, t \in S\}, v\rangle.$$

- Prefikseiksi riittävät luonnolliset luvut.

$\neg\Box$-sääntö: $\dfrac{n\neg\Box P}{k\neg P}$ $\qquad$ $\dfrac{n\Diamond P}{kP}$

missä k ei esiinny haarassa.

$\Box$-sääntö: $\dfrac{n\Box P}{kP}$ $\qquad$ $\dfrac{n\neg\Diamond P}{k\neg P}$

mille tahansa $k \neq 1$.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Esimerkki: KD45-pätevyys

Vertaillaan seuraavia $\mathbf{KD45}$-tauluja:

$(\Box P \to P)$:	1.	$1\neg(\Box P \to P)$	
	2.	$1\Box P$	(1)
	3.	$1\neg P$	(1)

$\Box(\Box P \to P)$:	1.	$1\neg\Box(\Box P \to P)$	
	2.	$2\neg(\Box P \to P)$	(1)
	3.	$2\Box P$	(2)
	4.	$2\neg P$	(2)
	5.	$2P$	(3)
		$\times$	

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

5. Looginen seuraavuus

- Tehtävänä ratkaista, onko $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$.
- Taulumenetelmässä asetetaan juurisolmuksi $\langle 1\rangle\neg P$ ja käytetään taulun rakentamiseen modaalilogiikan $\mathbf{L}$ mukaisia taulusääntöjä sekä kahta lisäsääntöä premissien käsittelyyn:

Globaali sääntö: solmulla σQ voidaan jatkaa mitä tahansa haaraa mille tahansa haarassa tarjolla olevalla prefiksillä σ ja mille tahansa globaalille premissille $Q \in \Sigma$.

Lokaali sääntö: solmulla $\langle 1\rangle Q$ voidaan jatkaa mitä tahansa haaraa mille tahansa lokaalille premissille $Q \in \Upsilon$.

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Esimerkki: K-seuraavuuden tutkiminen

Osoitetaan $\{P\} \models_{\mathbf{K}} \{\Box P \to Q\} \Longrightarrow Q$:

1. $\langle 1\rangle\neg Q$
2. $\langle 1\rangle\Box P \to Q$ (LP)

3.	$\langle 1\rangle\neg\Box P$	(2)	|	4.	$\langle 1\rangle Q$	(2)
5.	$\langle 1,2\rangle\neg P$	(2)	|		$\times$	
6.	$\langle 1,2\rangle P$	(GP)	|			
	$\times$					

© 2007 TKK, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio