T-79.5101 **kevät 2007**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 1
Ratkaisut

1. Jokaiselle toteutuvalle lauselogiikan lauseelle voidaan etsiä malli taulumenetelmällä merkitsemällä lause taulun juureen ja soveltamalla sen jälkeen taulusääntöjä, kunnes taulu on valmis.

   a)

$$\begin{array}{lll}
1. & \neg\big((P\to Q)\to(Q\to P)\big) & \\
2. & P\to Q & (1)\\
3. & \neg(Q\to P) & (1)\\
4. & Q & (3)\\
5. & \neg P & (3)\\
6. & \neg P \quad (2) \;\big|\; 7. \quad Q & (2)
\end{array}$$

   Taulun juurena olevan lauseen malli voidaan muodostaa valmiin taulun minkä tahansa avoimen haaran avulla keräämällä joukoksi kaikki haarassa esiintyvät (ei-negatoidut) atomilauseet. Yllä olevan taulun molemmista haaroista saadaan annetulle lauseelle sama malli $M = \{Q\}$.

   b)

$$\begin{array}{llll}
\multicolumn{4}{l}{1.\quad \big((P\lor\neg R)\leftrightarrow R\big)\land(P\to Q)}\\
\multicolumn{4}{l}{2.\quad (P\lor\neg R)\leftrightarrow R \quad (1)}\\
\multicolumn{4}{l}{3.\quad P\to Q \quad (1)}\\
\multicolumn{3}{l|}{4.\quad (P\lor\neg R)\land R \quad (2)} & 5.\quad \neg(P\lor\neg R)\land\neg R \quad (2)\\
\multicolumn{3}{l|}{11.\quad P\lor\neg R \quad (4)} & 6.\quad \neg(P\lor\neg R) \quad (5)\\
\multicolumn{3}{l|}{12.\quad R \quad (4)} & 7.\quad \neg R \quad (5)\\
\multicolumn{2}{l|}{13.\quad P \quad (11)} & \multicolumn{1}{l|}{14.\ \neg R\ (11)} & 8.\quad \neg P \quad (6)\\
\multicolumn{1}{l|}{15.\ \neg P\ (3)} & \multicolumn{1}{l|}{16.\ Q\ (3)} & \multicolumn{1}{l|}{\times} & 9.\quad \neg\neg R \quad (6)\\
\times & & & 10.\quad R \quad (9)\\
 & & & \times
\end{array}$$

   Tauluun jää yksi avoin haara, josta saadaan lauseelle malli $M = \{P, Q, R\}$.

2. Lauselogiikan lauseen loogista seuraavuutta annetusta lausejoukosta voidaan tutkia taulumenetelmällä merkitsemällä taulun juureen kaikki lausejoukossa olevat lauseet ja lisäämällä tutkittavana olevan lauseen negaatio tauluun näiden jälkeen. Sovelletaan tämän jälkeen taulusääntöjä, kunnes taulu on valmis. Looginen seuraavuus pätee, jos tuloksena syntyneen taulun kaikki kaikki haarat ovat suljettuja. Tehtävässä saadaan siten taulu

$$\begin{array}{llll}
\multicolumn{4}{l}{1.\quad Q\to P}\\
\multicolumn{4}{l}{2.\quad R\to(P\land Q)}\\
\multicolumn{4}{l}{3.\quad P\to(Q\land R)}\\
\multicolumn{4}{l}{4.\quad \neg\neg Q}\\
\multicolumn{4}{l}{5.\quad Q \quad (4)}\\
6.\ \neg Q\ (1) & \multicolumn{3}{|l}{7.\quad P \quad (1)}\\
\times & \multicolumn{1}{|l}{8.\ \neg P\ (3)} & \multicolumn{2}{|l}{9.\quad Q\land R \quad (3)}\\
 & \multicolumn{1}{|l}{\times} & \multicolumn{2}{|l}{10.\quad Q \quad (9)}\\
 & & \multicolumn{2}{l}{11.\quad R \quad (9)}\\
 & & 12.\ \neg R\ (2) & \multicolumn{1}{|l}{13.\ P\land Q\ (2)}\\
 & & \times & \multicolumn{1}{|l}{14.\ P\ (13)}\\
 & & & 15.\ Q\ (13)
\end{array}$$

   Koska valmiiseen tauluun jää yksi avoin haara, lause $\neg Q$ *ei* seuraa loogisesti tehtävässä annetusta lausejoukosta Σ. Tulos voidaan perustella muodostamalla taulun avoimesta haarasta vastamalli loogiselle seuraavuudelle (malli, joka toteuttaa kaikki lausejoukon Σ lauseet, mutta jossa $\neg Q$ on epätosi). Vastamalliksi saadaan $M = \{P, Q, R\}$.

3. Lauselogiikan lause on konjunktiivisessa normaalimuodossa, jos se on muotoa $(L_1^1 \lor \cdots \lor L_{n_1}^1) \land \cdots \land (L_1^m \lor \cdots \lor L_{n_m}^m)$, missä kukin lauseista L_i^j on *literaali* (atomilause tai sen negaatio).

   Lauseen disjunktiivinen normaalimuoto on puolestaan muotoa $(L_1^1 \land \cdots \land L_{n_1}^1) \lor \cdots \lor (L_1^m \land \cdots \land L_{n_m}^m)$ (lauseet L_i^j literaaleja).

   Lauseen disjunktiivinen normaalimuoto saadaan esimerkiksi etsimällä ensin lauseen kaikki mallit taulumenetelmällä ja keräämällä syntyneen taulun kaikista avoimista haaroista syntyvät mallit yhdeksi disjunktioksi.

$$
\begin{array}{llll|llll}
1. & & (P \to Q) \to (P \lor Q) & & & & & \\
2. & \neg(P \to Q) & (1) & & 3. & P \lor Q & & (1) \\
4. & P & (2) & & 6. & P \ (3) & \mid 7. & Q \ (3) \\
5. & \neg Q & (2) & & & & &
\end{array}
$$

Taulun avoimista haaroista saadaan taulun juuressa olevalle lauseelle disjunktiivinen normaalimuoto

$$(P \land \neg Q) \lor P \lor Q,$$

joka voidaan vielä sieventää muotoon

$$P \lor Q.$$

Konjunktiivisen normaalimuodon ratkaisemiseksi muodostetaan ensin lauseen *negaation* disjunktiivinen normaalimuoto:

$$
\begin{array}{lll|lll}
1. & \neg\big((P \to Q) \to (P \lor Q)\big) & & & & \\
2. & P \to Q & & & & (1) \\
3. & \neg(P \lor Q) & & & & (1) \\
4. & \neg P & & & & (3) \\
5. & \neg Q & & & & (3) \\
6. & \neg P & (2) & 7. & Q & (2) \\
 & & & & \times &
\end{array}
$$

Lauseen negaation

$$\neg\big((P \to Q) \to (P \lor Q)\big)$$

disjunktiiviseksi normaalimuodoksi saadaan taulun avoimesta haarasta

$$\neg P \land \neg Q.$$

Alkuperäisen lauseen konjunktiivinen normaalimuoto saadaan tästä negatoimalla ja käyttämällä sitten hyväksi De Morganin sääntöjä. Lauseen

$$(P \to Q) \to (P \lor Q)$$

konjunktiivinen normaalimuoto on siten

$$\neg(\neg P \land \neg Q) \equiv P \lor Q.$$

(Tässä tapauksessa siis lauseen disjunktiivinen ja konjunktiivinen normaalimuoto ovat samat. Tämä ei kuitenkaan päde yleisesti.)

4. a)

$$
\begin{array}{lll}
1. & \exists x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2) \land \forall x_1 \forall x_2 \big(P(x_1, x_2) \to P(x_2, x_1)\big) & \\
2. & \exists x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2) & (1) \\
3. & \forall x_1 \forall x_2 \big(P(x_1, x_2) \to P(x_2, x_1)\big) & (1) \\
4. & \exists x_2 P(c, x_2) & (2, x_1/c) \\
5. & P(c, d) & (4, x_2/d) \\
6. & \forall x_2 \big(P(c, x_2) \to P(x_2, c)\big) & (3, x_1/c) \\
7. & P(c, d) \to P(d, c) & (6, x_2/d) \\
8. & \neg P(c, d) \ (7) \ \mid \ 9. \ P(d, c) & (7) \\
 & \times \ \mid \ 10. \ \forall x_2 \big(P(d, x_2) \to P(x_2, d)\big) & (3, x_1/d) \\
11. & P(d, c) \to P(c, d) & (10, x_2/c) \\
12. & \neg P(d, c) \ (11) \ \mid \ 13. \ P(c, d) & (11) \\
 & \times \ \mid \ 14. \ P(c, c) \to P(c, c) & (6, x_2/c) \\
15. & P(d, d) \to P(d, d) & (10, x_2/d) \\
16. & \neg P(c, c) \ (14) \ \mid \ 17. \ P(c, c) \ (14) & \\
18. & \neg P(d, d) \ (15) \mid 19. \ P(d, d) \ (15) \mid 20. \ \neg P(d, d) \ (15) \mid 21. \ P(d, d) \ (15) &
\end{array}
$$

Valmiiseen tauluun jää neljä avointa haaraa. Kunkin avoimen haaran avulla voidaan määritellä rakenne (struktuuri), joka antaa mallin taulun juuressa olevalle lauseelle. Muodostetaan struktuuri $\mathcal{A}$ taulun vasemmanpuoleisimman avoimen haaran avulla. Olkoon universumi

$$A = \{1, 2\},$$

ja määritellään

$$c^{\mathcal{A}} = 1, \qquad d^{\mathcal{A}} = 2 \quad \text{sekä} \quad P^{\mathcal{A}} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}.$$

Tarkistetaan, että lause on tosi rakenteessa $\mathcal{A}$. Koska esim. $\langle 1, 2\rangle = \langle c^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}\rangle \in P^{\mathcal{A}}$, niin $\mathcal{A} \models P(c, d)$, joten edelleen myös

$$\mathcal{A} \models \exists x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2)$$

pätee. Myös

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \forall x_2 (P(x_1, x_2) \to P(x_2, x_1)),$$

on voimassa, koska

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A} \models P(c, c) \to P(c, c), \\
&\mathcal{A} \models P(c, d) \to P(d, c), \\
&\mathcal{A} \models P(d, c) \to P(c, d) \text{ ja} \\
&\mathcal{A} \models P(d, d) \to P(d, d),
\end{aligned}
$$

sillä $c^{\mathcal{A}} = 1, d^{\mathcal{A}} = 2, \langle c^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}} \rangle = \langle 1,1 \rangle \notin P^{\mathcal{A}}$ (jolloin $\mathcal{A} \not\models P(c,c)$), $\langle c^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}} \rangle = \langle 1,2 \rangle \in P^{\mathcal{A}}$ (jolloin $\mathcal{A} \models P(c,d)$), $\langle d^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}} \rangle = \langle 2,1 \rangle \in P^{\mathcal{A}}$ (joten $\mathcal{A} \models P(d,c)$) ja $\langle d^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}} \rangle = \langle 2,2 \rangle \notin P^{\mathcal{A}}$ ($\mathcal{A} \not\models P(d,d)$).

b) Tässä tapauksessa taulumenetelmän avulla ei saada aikaan valmista äärellistä taulua. Osoittautuu, että taulumenetelmää sovellettaessa käyttöön joudutaan ottamaan toistuvasti lisää uusia vakioita, koska taulun kaikkia haaroja ei saada ristiriitaisiksi. Vakioiden soveltaminen uudelleen tauluun syntyviin universaalisti kvantifioituihin lauseisiin pakottaa ottamaan käyttöön lisää uusia vakioita jne.

(Tämä on esimerkki predikaattilogiikan *puoliratkeavuudesta*: ei ole olemassa systemaattista menetelmää, jonka avulla voidaan äärellisen monella askeleella joko etsiä malli mielivaltaiselle predikaattilogiikan lauseelle tai osoittaa se toteutumattomaksi.)

Lause on kuitenkin tosi esim. seuraavassa rakenteessa $\mathcal{A}$:

Olkoon universumi $A = \{1\}$. Lisäksi tarvitaan vakiosymboli c ja predikaatti P siten, että

$$c^{\mathcal{A}} = 1 \quad \text{ja} \quad P^{\mathcal{A}} = \{\langle 1,1 \rangle\}.$$

Tarkistetaan, että

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \exists x_2 P(x_1,x_2) \wedge \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P(x_1,x_2) \wedge P(x_2,x_3) \to P(x_1,x_3))$$

pätee. Koska universumissa on ainoastaan yksi alkio ($c^{\mathcal{A}} = 1$) ja $\langle 1,1 \rangle \in P$ (jolloin $\mathcal{A} \models P(c,c)$),

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \exists x_2 P(x_1,x_2)$$

pätee. Samasta syystä

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P(x_1,x_2) \wedge P(x_2,x_3) \to P(x_1,x_3)),$$

koska

$$\mathcal{A} \models P(c,c) \wedge P(c,c) \to P(c,c).$$

5. a)

1.	$\neg\Big(\big(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)\big) \to \forall x\big(P(x) \vee Q(x)\big)\Big)$	
2.	$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$	(1)
3.	$\neg \forall x\big(P(x) \vee Q(x)\big)$	(1)
4.	$\forall x P(x)$	(2)
5.	$\forall x Q(x)$	(2)
6.	$\neg\big(P(c) \vee Q(c)\big)$	$(3, x/c)$
7.	$\neg P(c)$	(6)
8.	$\neg Q(c)$	(6)
9.	$P(c)$	$(4, x/c)$
	$\times$	

b)

1.	$\neg \exists y\big(\exists x P(x) \to P(y)\big)$	
2.	$\neg\big(\exists x P(x) \to P(c)\big)$	$(1, y/c)$
3.	$\exists x P(x)$	(2)
4.	$\neg P(c)$	(2)
5.	$P(d)$	$(3, x/d)$
6.	$\neg\big(\exists x P(x) \to P(d)\big)$	$(1, y/d)$
7.	$\exists x P(x)$	(6)
8.	$\neg P(d)$	(6)
	$\times$	

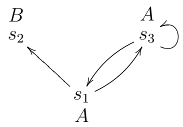
T-79.5101 **kevät 2007**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 2
Ratkaisut

1. a) Jos φ on tosi, niin agentti tietää φ:n.
   b) Jos agentti ei tiedä φ:tä, niin agentti tietää, että se ei tiedä φ:tä.
   c) Jos agentti tietää, että φ:stä seuraa ψ, niin silloin, jos agentti tietää φ:n, niin agentti tietää ψ:n.
   d) Agentti tietää, että φ on tosi tai agentti tietää, että φ ei ole tosi: toisin sanoen agentti tietää, *onko* φ tosi.

2. a) $\varphi \rightarrow LK\varphi$
   b) $L\varphi \wedge L\psi \rightarrow L(\varphi \wedge \psi)$
   c) $K\varphi \rightarrow L\varphi$
   d) $LL\varphi \rightarrow L\varphi$

3. Olkoon $P =$ "ulkona sataa".
   a) $K_a K_b P \wedge \neg K_b K_a K_b P$
   b) $K_a(\neg K_b P \wedge \neg K_b \neg P)$
   c) $K_b(K_a P \vee K_a \neg P)$
   d) $\neg K_a K_b K_a P \wedge \neg K_a \neg K_b K_a P$

4. Tehtävässä annettu malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ on



   a) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box A$ ei päde, koska $\langle s_1, s_2\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s_2 \nVdash A$.
   b) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond B \rightarrow \Box\Diamond\top$ pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_1 \nVdash \Diamond B \quad \text{tai} \quad \mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box\Diamond\top$$

pätee. Koska $\langle s_1, s_2\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s_2 \Vdash B$, ei $\mathcal{M}, s_1 \nVdash \Diamond B$ päde. $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box\Diamond\top$ pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Diamond\top \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Diamond\top$$

pätevät. Koska ei kuitenkaan ole olemassa maailmaa $s \in S$ siten, että $\langle s_2, s\rangle \in R$, seuraa, että $\mathcal{M}, s_2 \nVdash \Diamond\top$, ja edelleen, että $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box\Diamond\top$ ja $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond B \rightarrow \Box\Diamond\top$ eivät päde.

   c) $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Diamond\Diamond\Box\bot$ pätee, joss $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond\Box\bot$ tai $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Diamond\Box\bot$ pätee. $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond\Box\bot$ puolestaan pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box\bot \quad \text{tai} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\bot.$$

Koska ei ole olemassa maailmaa $s \in S$, jolle $\langle s_2, s\rangle \in R$, seuraa, että $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box\bot$ pätee. Siten myös $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond\Box\bot$ ja edelleen $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Diamond\Diamond\Box\bot$ pätevät.

   d) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box(B \vee \Box\Diamond A)$ pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_2 \Vdash B \vee \Box\Diamond A \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash B \vee \Box\Diamond A$$

pätevät. $\mathcal{M}, s_2 \Vdash B \vee \Box\Diamond A$ pätee, koska $\mathcal{M}, s_2 \Vdash B$. $\mathcal{M}, s_3 \Vdash B \vee \Box\Diamond A$ pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_3 \Vdash B \quad \text{tai} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Diamond A.$$

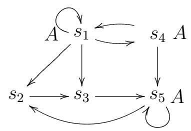
$\mathcal{M}, s_3 \Vdash B$ ei toteudu, koska $v(s_3, B) =$ false. Nyt $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Diamond A$, joss $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond A$ ja $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Diamond A$ pätevät. Näin myös on, koska $\langle s_1, s_3\rangle \in R$, (esim.) $\langle s_3, s_3\rangle \in R$ ja $v(s_3, A) =$ true. Siten $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Diamond A$ ja $\mathcal{M}, s_3 \Vdash B \vee \Box\Diamond A$ pätevät. Seuraa siis, että myös $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box(B \vee \Box\Diamond A)$ pätee.

   e) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond(\Box A \wedge \Box\neg A)$ pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box A \wedge \Box\neg A \quad \text{tai} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box A \wedge \Box\neg A.$$

Nähdään, että $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box A \wedge \Box\neg A$ pätee, koska sekä $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box A$ että $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box\neg A$, mikä seuraa siitä, että ei ole olemassa maailmaa $s \in S$ siten, että $\langle s_2, s\rangle \in R$.

5. Tehtävässä annettu malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ on



Tässä tehtävässä voitaisiin lauseen $\Box\Diamond\Box\Diamond A$ totuusarvot eri maailmoissa määrittää suoraan modaalilogiikan operaattorien $\Box$ ja $\Diamond$ määritelmiä hyväksi käyttäen kuten edellisessä tehtävässä. Voitaisiin siis esimerkiksi tutkia järjestyksessä, päteekö $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box\Diamond\Box\Diamond A$, $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box\Diamond\Box\Diamond A$ jne., kunnes löydetään maailma, jossa annettu modaalilogiikan lause pätee.

Vaihtoehtoisesti voidaan kuitenkin lähteä liikkeelle annetun lauseen pienimmistä alilauseista (tässä tapauksessa atomilause A) ja johtaa niiden totuusarvojen sekä modaalioperaattorien määritelmien avulla joidenkin suurempien alilauseiden totuusarvot *kaikissa* mallin maailmoissa. Tätä voidaan toistaa järjestyksessä yhä suuremmille alilauseille, kunnes lopulta saadaan selville mallin kaikki maailmat, joissa lause $\Box\Diamond\Box\Diamond A$ pätee. Vastaukseksi voidaan valita silloin jokin näistä maailmoista.

Koska $v(s_1, A) = v(s_4, A) = v(s_5, A) =$ true ja muutoin $v(s, A) =$ false, nähdään, että

$$\mathcal{M}, s_1 \Vdash A, \quad \mathcal{M}, s_4 \Vdash A \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_5 \Vdash A$$

(ja muulloin $\mathcal{M}, s \nVdash A$). Koska nyt esim. $\langle s_1, s_4\rangle \in R$, $\langle s_3, s_5\rangle \in R$, $\langle s_4, s_1\rangle \in R$ ja $\langle s_5, s_5\rangle \in R$, seuraa modaalioperaattorin $\Diamond$ semantiikasta, että

$$\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond A, \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Diamond A, \quad \mathcal{M}, s_4 \Vdash \Diamond A \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_5 \Vdash \Diamond A$$

pätevät. Sen sijaan $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Diamond A$ ei ole voimassa, koska maailmalla s_2 on ainoana seuraajanaan R-relaatiossa maailma s_3, mutta $\mathcal{M}, s_3 \nVdash A$.

Modaalioperaattorin $\Box$ semantiikan määritelmän avulla päätellään, että

$$\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box\Diamond A, \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Diamond A \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_4 \Vdash \Box\Diamond A,$$

sillä kunkin maailman s_2, s_3 ja s_4 kaikille R-relaation seuraajamaailmoille s' pätee $\mathcal{M}, s' \Vdash \Diamond A$. Todetaan lisäksi, että nämä ovat mallin *ainoat* maailmat, joissa lause $\Box\Diamond A$ pätee. (Lause $\Box\Diamond A$ ei päde maailmoissa s_1 ja s_5, sillä näillä maailmoilla on R-relaatiossa seuraajana maailma s_2, jolle $\mathcal{M}, s_2 \nVdash \Diamond A$.)

Soveltamalla jälleen modaalioperaattorin $\Diamond$ semantiikan määritelmää todetaan, että

$$\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond\Box\Diamond A, \quad \mathcal{M}, s_2 \Vdash \Diamond\Box\Diamond A \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_5 \Vdash \Diamond\Box\Diamond A,$$

sillä kullakin maailmoista s_1, s_2 ja s_5 on seuraajamaailma, jossa $\Box\Diamond A$ pätee (koska edellisen perusteella $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box\Diamond A$ ja $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Diamond A$,

ja esim. $\langle s_1, s_2\rangle \in R$, $\langle s_2, s_3\rangle \in R$ ja $\langle s_5, s_2\rangle \in R$). Nähdään myös, että lause $\Diamond\Box\Diamond A$ ei päde maailmassa s_3 (koska s_3:n ainoa seuraaja R-relaatiossa on s_5, mutta $\mathcal{M}, s_5 \nVdash \Box\Diamond A$) eikä maailmassa s_4 (koska $\mathcal{M}, s_1 \nVdash \Box\Diamond A$ ja $\mathcal{M}, s_5 \nVdash \Box\Diamond A$, eikä s_4:llä ole muita seuraajia relaatiossa R).

Operaattorin $\Box$ semantiikan avulla todetaan lopulta, että

$$\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Diamond\Box\Diamond A, \quad \mathcal{M}, s_4 \Vdash \Box\Diamond\Box\Diamond A \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_5 \Vdash \Box\Diamond\Box\Diamond A$$

pätevät, sillä kaikille maailmojen s_3, s_4 ja s_5 R-seuraajille s' pätee $\mathcal{M}, s' \Vdash \Diamond\Box\Diamond A$. Havaitaan lisäksi, että s_3, s_4 ja s_5 ovat ainoat tehtävän lauseen toteuttavat maailmat. Näistä siis mikä tahansa voidaan valita tehtävän vastaukseksi.

Huomaa, että jokaisessa vaiheessa on tärkeää etsiä *kaikki* ne mallin maailmat, jossa ko. vaiheessa tutkittavana oleva alilause pätee, sillä muuten voidaan päätyä tilanteeseen, jossa jonkin muun alilauseen totuusarvoa ei voidakaan päätellä aiemmin laskettujen tulosten perusteella suoraan.

Jos esimerkiksi todettaisiin pelkästään, että $\mathcal{M}, s_5 \Vdash A$ ja $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Diamond A$ (koska $\langle s_3, s_5\rangle \in R$), ei nyt ainoastaan tämän tiedon avulla voida päätellä esim. alilauseen $\Box\Diamond A$ totuusarvoa s_4:ssä, sillä se riippuu myös lauseen $\Diamond A$ totuusarvoista s_1:ssä ja s_5:ssä, jotka on s_4:n seuraajia. (Erityisesti olisi nyt *virhe* olettaa, että esim. $\mathcal{M}, s_4 \nVdash \Box\Diamond A$ olisi voimassa; kuten yllä todettiin, lause $\Box\Diamond A$ itse asiassa pätee maailmassa s_4.)

T-79.5101 **kevät 2007**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 3
Ratkaisut

1. a) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s\rangle, \langle s, t\rangle\}$, $v(s, A) = \text{true}$, $v(t, A) = \text{false}$.

$$\begin{tikzcd} \underset{A}{s} \arrow[loop left] \arrow[r] & \underset{\neg A}{t} \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A$ pätee, koska $\langle s, s\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s \Vdash A$. $\mathcal{M}, s \Vdash \Box A$ ei kuitenkaan päde, koska $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \nVdash A$. Siis $\mathcal{M}, s \nVdash \Diamond A \to \Box A$.

b) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle\}$, $v(s, A) = v(t, A) = \text{false}$.

$$\neg A\ s \longrightarrow t\ \neg A$$

Koska $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \nVdash A$, $\mathcal{M}, s \nVdash \Box A$. Siten $\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box A$ pätee. Koska maailmalla t ei ole seuraajia relaatiossa R, $\mathcal{M}, t \Vdash \Box A$ pätee. Tällöin $\mathcal{M}, t \nVdash \neg\Box A$, mistä seuraa, että $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\neg\Box A$ (koska $\langle s, t\rangle \in R$). Siis $\mathcal{M}, s \nVdash \neg\Box A \to \Box\neg\Box A$.

c) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s, t, u\}$, $R = \{\langle s, t\rangle, \langle s, u\rangle, \langle t, t\rangle\}$, $v(s, A) = v(u, A) = \text{false}$ ja $v(t, A) = \text{true}$.

$$\begin{tikzcd} & \overset{\neg A}{s} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \overset{A}{t} \arrow[loop left] & & \overset{\neg A}{u} \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}, t \Vdash \Diamond A$, koska $\langle t, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash A$. Koska t on itsensä ainoa seuraaja R-relaatiossa, myös $\mathcal{M}, t \Vdash \Box A$ pätee. Siten $\mathcal{M}, t \Vdash \Diamond A \wedge \Box A$ pätee, mistä seuraa, että $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond(\Diamond A \wedge \Box A)$ pätee (koska $\langle s, t\rangle \in R$). Koska u:lla ei ole R-relaatiossa seuraajia, $\mathcal{M}, u \nVdash \Diamond A$. Koska $\langle s, u\rangle \in R$, seuraa tästä, että $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\Diamond A$. Siten $\mathcal{M}, s \nVdash \Diamond(\Diamond A \wedge \Box A) \to \Box\Diamond A$.

d) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s\rangle, \langle s, t\rangle\}$, $v(s, A) = v(t, B) = \text{true}$, $v(s, B) = v(t, A) = \text{false}$.

$$\begin{tikzcd} \underset{A, \neg B}{s} \arrow[loop left] \arrow[r] & \underset{\neg A, B}{t} \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A$ pätee, koska $\langle s, s\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s \Vdash A$ pätee. Myös $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond B$ on voimassa, koska $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash B$. Siten $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A \wedge \Diamond B$. $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond(A \wedge B)$ ei kuitenkaan päde, sillä s:llä ei ole olemassa sellaista seuraajaa s' R-relaatiossa, jolle pätisi $\mathcal{M}, s' \Vdash A \wedge B$. Siis $\mathcal{M}, s \nVdash (\Diamond A \wedge \Diamond B) \to \Diamond(A \wedge B)$.

2. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$.

($\Rightarrow$) Oletetaan, että $\Diamond\top$ on pätevä mallissa. Olkoon $s \in S$ mikä tahansa mallin maailma. Oletuksen perusteella $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond\top$ pätee, mistä seuraa, että on olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash \top$. Edelleen päätellään, että

$$\text{jos} \quad \mathcal{M}, s \Vdash \Box A, \quad \text{niin silloin välttämättä myös} \quad \mathcal{M}, t \Vdash A,$$

s:n seuraajalle t, ja siksi

$$\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A.$$

Siis jos $\mathcal{M}, s \Vdash \Box A$, niin silloin myös $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A$. Siten $\mathcal{M}, s \Vdash \Box A \to \Diamond A$, eli myös $\Box A \to \Diamond A$ on pätevä mallissa.

($\Leftarrow$) Oletetaan, että $\Box A \to \Diamond A$ on pätevä mallissa. Olkoon $s \in S$. Osoitetaan, että nyt on välttämättä olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t\rangle \in R$. Jos näin ei olisi, s:llä ei olisi R-relaatiossa yhtään seuraajaa, jolloin $\mathcal{M}, s \Vdash \Box A$ olisi voimassa. Koska $\Box A \to \Diamond A$ on oletuksen mukaan pätevä mallissa, olisi nyt välttämättä oltava myös $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A$, mistä seuraa ristiriita.

On siis olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t\rangle \in R$. Siten $\mathcal{M}, t \Vdash \top$, jolloin myös $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond\top$ pätee. Seuraa, että $\Diamond\top$ on pätevä mallissa.

3. Käytetään tehtävässä hyväksi generoiduille alimalleille[1] voimassa olevaa tulosta:

[1] Olkoon annettu malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$. Joukon $S_0 \subseteq S$ *generoima alimalli* $\mathcal{M}' = \langle S', R', v'\rangle$ on malli, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

1. S' on pienin S:n osajoukko, joka toteuttaa ehdot
   - $S_0 \subseteq S'$.
   - S' on R-suljettu: jos on olemassa maailmat $s \in S'$ ja $t \in S$ siten, että $\langle s, t\rangle \in R$, niin silloin on oltava myös $t \in S'$.
2. $R' = (S' \times S') \cap R$.
3. Kaikille atomilauseille P ja kaikille maailmoille $s \in S'$: $v'(s, P) = v(s, P)$.

Jos $\mathcal{M}' = \langle S', R', v' \rangle$ on mallin $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ maailmojen joukon $S_0 \subseteq S$ generoima alimalli, niin silloin kaikille lauseille P ja kaikille maailmoille $s \in S'$ pätee

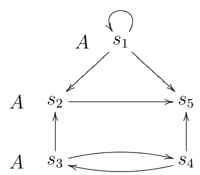
$$\mathcal{M}, s \Vdash P \quad \text{joss} \quad \mathcal{M}', s \Vdash P.$$

Koska tehtävässä annettu lause

$$\Box\big((\Box\Box A \to \Diamond\Box A) \wedge \Diamond\Box(\Box A \to \Diamond A)\big) \to \big(\Diamond(\Diamond A \to \Box A) \to ((\Diamond A \wedge \Box\Diamond A) \vee \Diamond\Box\Box\neg A)\big)$$

on tosi tehtävässä annetun mallin $\mathcal{M}$ maailmassa s_4, se on tosi myös missä tahansa $\mathcal{M}$:stä generoidussa alimallissa, joka sisältää maailman s_4.

Tehtävän malli $\mathcal{M}$:

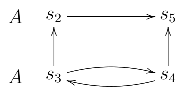


Muodostetaan maailmojen joukon $S_0 = \{s_4\}$ generoima alimalli $\mathcal{M}' = \langle S', R', v' \rangle$.

Koska $S_0 \subseteq S'$, niin $s_4 \in S'$. Koska nyt $s_3 \in S$, $s_5 \in S$ ja $\langle s_4, s_3 \rangle \in R$, $\langle s_4, s_5 \rangle \in R$, on oltava $s_3 \in S'$ ja $s_5 \in S'$, jotta S' olisi R-suljettu. Edelleen, koska $s_2 \in S$ ja $\langle s_3, s_2 \rangle \in R$, on myös oltava $s_2 \in S'$. Koska maailma s_1 ei ole saavutettavissa maailmoista s_2, s_3, s_4 tai s_5 R-relaation kaarten välityksellä, maailmojen joukko $\{s_2, s_3, s_4, s_5\}$ on R-suljettu. Selvästi tämä joukko on myös pienin S:n R-suljettu osajoukko, joka sisältää maailman s_3. Generoidun alimallin ehtojen täyttämiseksi voidaan siis määritellä

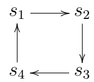
$$\begin{aligned} S' &= \{s_2, s_3, s_4, s_5\}, \\ R' &= \{\langle s_2, s_5 \rangle, \langle s_3, s_2 \rangle, \langle s_3, s_4 \rangle, \langle s_4, s_3 \rangle, \langle s_4, s_5 \rangle\} \end{aligned}$$

ja $v'(s_2, A) = v'(s_3, A) = \text{true}$, $v'(s_4, A) = v'(s_5, A) = \text{false}$, jolloin malli $\mathcal{M}'$ on



Koska tehtävän lause toteutuu mallin $\mathcal{M}$ maailmassa s_4, se toteutuu myös mallin $\mathcal{M}'$ maailmassa s_4, koska $\mathcal{M}'$ on generoitu alimalli. Koska $\mathcal{M}'$ sisältää neljä mahdollista maailmaa, se on eräs tehtävän ratkaisu.

4. $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$:



$\mathcal{F}' = \langle S', R' \rangle$, missä $S' = \{r_1, r_2\}$ ja $R' = \{\langle r_1, r_2 \rangle,\ \langle r_2, r_1 \rangle\}$:

Muodostetaan kuvaus $f : S \to S'$:

$$\begin{aligned} f(s_1) = f(s_3) = r_1 \\ f(s_2) = f(s_4) = r_2 \end{aligned}$$

Kuvaus f on p-morfismi, koska

1. f on surjektiivinen (esim. $r_1 = f(s_1)$ ja $r_2 = f(s_2)$)
2. $\forall s, t \in S$: jos sRt pätee, niin $f(s)R'f(t)$ pätee
(Esimerkiksi paria $\langle s_1, s_2 \rangle \in R$ vastaa pari $\langle f(s_1), f(s_2) \rangle = \langle r_1, r_2 \rangle$, joka kuuluu relaatioon R'; loput relaation R parit voidaan tarkistaa vastaavasti.)
3. $\forall s \in S\ \forall t \in S'$: jos $f(s)R't$ pätee, niin on olemassa $u \in S$ siten, että sRu ja $f(u) = t$ pätee
(Esimerkiksi $\langle r_2, r_1 \rangle = \langle f(s_4), r_1 \rangle \in R'$, ja havaitaan, että $s_1 \in S$, s_4Rs_1 ja $f(s_1) = r_1$; loput tapaukset vastaavasti.)

P-morfismeja koskevan proposition perusteella seuraa, että

$$\text{jos } \mathcal{F} \models P, \quad \text{niin} \quad \mathcal{F}' \models P$$

kaikille lauseille P.