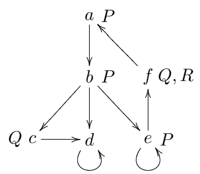
T-79.5101 **kevät 2007**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 11
Ratkaisut

1. $\mathcal{M}$:



a) $\mathcal{M}, a \not\models \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$, sillä (esim.) $(a, b, d, d, d, \ldots)$ on tilasta a alkava täysi polku, joka ei kulje sellaisen tilan $s \in S$ kautta, jolle pätisi $\mathcal{M}, s \models Q$.

b) Mallin F-reiluja polkuja ovat kaikki ne täydet polut, jotka kaikille lauseille $\varphi \in F$ sisältävät äärettömän monta tilaa $s \in S$ siten, että $\mathcal{M}, s \models \varphi$. Koska $F = \{R\}$, rajoitutaan siis tarkastelemaan sellaisia polkuja, jotka sisältävät äärettömän monta tilaa $s \in S$, joille $\mathcal{M}, s \models R$.

Koska $\{s \in S \mid \mathcal{M}, s \models R\} = \{f\}$, seuraa, että kaikkien mallin F-reilujen polkujen tulee kulkea äärettömän monta kertaa tilan f kautta. Koska tiloista c ja d ei ole yhteyttä tilaan f, mikään F-reilu polku ei voi kulkea näiden tilojen kautta. Siten mallin jokainen F-reilu polku on muotoa

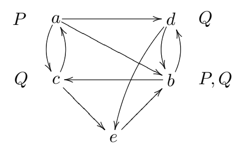
$$(a, b, \underbrace{e, \ldots, e}_{n_1 \text{ kpl}}, f, a, b, \underbrace{e, \ldots, e}_{n_2 \text{ kpl}}, f, a, b, \underbrace{e, \ldots, e}_{n_3 \text{ kpl}}, f, \ldots)$$

missä $n_1, n_2, n_3, \ldots$ ovat (äärellisiä) positiivisia kokonaislukuja. Koska erityisesti n_1 on äärellinen ja $\mathcal{M}, a \models P$, $\mathcal{M}, b \models P$, $\mathcal{M}, e \models P$ sekä $\mathcal{M}, f \models Q$, seuraa, että $\mathcal{M}, a \models_F \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$ pätee.

c) $\mathcal{M}, a \models \mathbf{EG}P$, sillä $(a, b, e, e, e, \ldots)$, on tilasta a alkava täysi polku, jonka jokaisessa tilassa $s \in \{a, b, e\}$ pätee $\mathcal{M}, s \models P$.

d) Huomataan, että c-kohdan polku on mallin ainoa tilasta a alkava täysi polku, jonka kaikissa tiloissa lause P pätee. Tämä polku ei kuitenkaan ole F-reilu, sillä se ei kulje kertaakaan tilan f kautta. Siten $\mathcal{M}, a \not\models_F \mathbf{EG}P$.

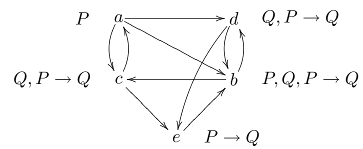
2. $\mathcal{M}$:



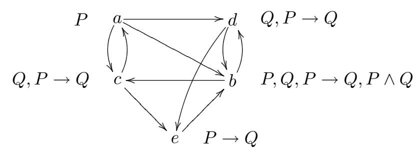
Järjestetään lauseen $\mathbf{AXE}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big)$ alilauseet järjestykseen, jonka avulla alilauseiden totuusarvo mallin eri tiloissa voidaan määrittää vaiheittain aiemmin käsiteltyjen alilauseiden totuusarvojen perusteella, kunnes saadaan lopulta selville koko lauseen totuusarvo mallin eri tiloissa. Alilauseet voidaan käsitellä esimerkiksi järjestyksessä

$$P, Q, P \to Q, P \wedge Q, \mathbf{E}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big), \mathbf{AXE}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big).$$

Lauseiden P ja Q totuusarvot saadaan suoraan valuaatiosta v. Lasketaan alilauseen $P \to Q$ totuusarvot mallin eri tiloissa:



Alilause $P \wedge Q$:

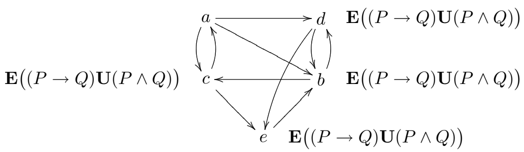


Lasketaan alilauseen $\mathbf{E}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big)$ totuusarvot luentokalvoissa esitetyn CheckEU-algoritmin avulla. Aloitetaan siis tilajoukosta, jossa alilause $P \wedge Q$ on tosi ($\{b\}$) ja merkitään $\mathbf{E}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big)$ todeksi tilassa b. Kerätään tämän jälkeen kaikki ne tilat $s \in S$, joille $\langle s, b\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s \models P \to Q$ (ja joihin lause $\mathbf{E}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big)$

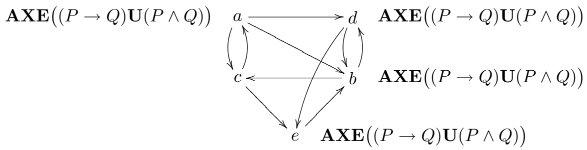
ei ole vielä merkitty todeksi). Saadaan tilajoukko $\{d, e\}$, jonka kaikkiin tiloihin merkitään lause $\mathbf{E}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big)$ todeksi. Toistetaan nyt menettely tilajoukon tilojen d ja e edeltäjille ja edelleen niiden edeltäjille niin kauan, kunnes tulosjoukko ei enää kasva. Koko algoritmin suoritus voidaan siis esittää seuraavasti:

Kierros	Tulosjoukko	Käsiteltävänä oleva tilajoukko	Tulosjoukkoon lisättävät tilat
1	$\{b\}$	$\{b\}$	$\{d, e\}$
2	$\{b, d, e\}$	$\{d, e\}$	$\{c\}$
3	$\{b, c, d, e\}$	$\{c\}$	$\emptyset$

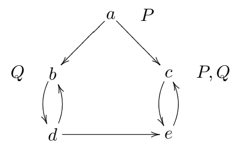
Alilause $\mathbf{E}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big)$ pätee siis tiloissa



Lasketaan viimein lauseen $\mathbf{AXE}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big)$ totuusarvot keräämällä kaikki ne mallin tilat, joiden kaikille R-relaation seuraajatiloille pätee $\mathbf{E}\big((P \to Q)\mathbf{U}(P \wedge Q)\big)$. Lopputulos on siten



3. $\mathcal{M}$:



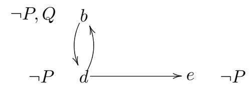
Esitetään lause ensin **EU**- ja **EG**-operaattoreiden avulla:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{AG}\big(Q \to \mathbf{A}(\mathbf{EF}P\mathbf{UAF}P)\big)\\
\equiv\ &\mathbf{AG}\big(Q \to \mathbf{A}(\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P)\mathbf{U}\neg\mathbf{EG}\neg P)\big)\\
\equiv\ &\mathbf{AG}\big(Q \to \neg\mathbf{E}\big((\neg\neg\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \neg\neg\mathbf{EG}\neg P)\big) \wedge \neg\mathbf{EG}\neg\neg\mathbf{EG}\neg P\big)\\
\equiv\ &\mathbf{AG}\big(Q \to \neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big) \wedge \neg\mathbf{EGEG}\neg P\big)\\
\equiv\ &\neg\mathbf{EF}\neg\big(Q \to \neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big) \wedge \neg\mathbf{EGEG}\neg P\big)\\
\equiv\ &\neg\mathbf{E}\big(\top\mathbf{U}\neg\big(Q \to \neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big) \wedge \neg\mathbf{EGEG}\neg P\big)\big)
\end{aligned}
$$

Järjestetään alilauseet sopivaan laskentajärjestykseen, esim.

$$
\begin{gathered}
P, Q, \neg P, \mathbf{EG}\neg P, \mathbf{EGEG}\neg P, \neg\mathbf{EGEG}\neg P,\\
\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P), \neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P), \neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P,\\
\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big), \neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big),\\
\neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big) \wedge \neg\mathbf{EGEG}\neg P,\\
Q \to \neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big) \wedge \neg\mathbf{EGEG}\neg P,\\
\neg\big(Q \to \neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big) \wedge \neg\mathbf{EGEG}\neg P\big),\\
\mathbf{E}\big(\top\mathbf{U}\neg\big(Q \to \neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big) \wedge \neg\mathbf{EGEG}\neg P\big)\big),\\
\neg\mathbf{E}\big(\top\mathbf{U}\neg\big(Q \to \neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big) \wedge \neg\mathbf{EGEG}\neg P\big)\big)
\end{gathered}
$$

Koska P pätee tiloissa a ja c, niin $\neg P$ pätee tiloissa $\{b, d, e\}$. Nyt lauseen $\mathbf{EG}\neg P$ totuusarvo voidaan laskea luentokalvoilla esitetyn CheckEG-algoritmin avulla. Muodostetaan siis ensin mallin $\mathcal{M}$ rajoittuma $\mathcal{M}'$ niihin tiloihin, joissa $\neg P$ pätee:



Etsitään seuraavaksi mallin $\mathcal{M}'$ ei-triviaalit vahvasti kytketyt komponentit[1] ja merkitään lause $\mathbf{EG}\neg P$ todeksi kaikissa näihin komponentteihin kuuluvissa tiloissa. Kerätään sitten (samalla tavoin kuin

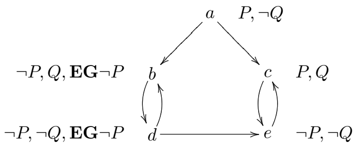
[1]Yleisesti: Mallin $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ tilojen ei-tyhjä osajoukko $\emptyset \subset C \subseteq S$ on $\mathcal{M}$:n ei-triviaali vahvasti kytketty komponentti, jos mitkä tahansa kaksi tilaa $x, y \in C$ ovat $\mathcal{M}$:ssä saavutettavissa toisistaan joitakin vähintään yhden R:n kaaren sisältäviä polkuja pitkin, eikä ole olemassa tiloja $z \in C$, $w \in S \setminus C$ siten, että z ja w olisivat saavutettavissa $\mathcal{M}$:ssä toisistaan tällaisia polkuja pitkin.

CheckEU-algoritmissa) vaiheittain kaikki ne tilat, jotka ovat jonkin näihin komponentteihin kuuluvan tilan edeltäjiä mallissa $\mathcal{M}'$, merkitään lause todeksi myös näissä tiloissa ja toistetaan tarkastelu kaikille näille tiloille niin kauan, kunnes ei enää saada uusia tiloja, joissa lause ei jo olisi tosi.

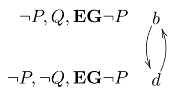
Ainoa $\mathcal{M}'$:n ei-triviaali vahvasti kytketty komponentti on $\{b, d\}$. Koska tila e ei ole kummankaan tilan edeltäjä $\mathcal{M}'$:ssa, CheckEG-algoritmi pysähtyy heti ensimmäisen kierroksen jälkeen:

Kierros	Tulosjoukko	Käsiteltävänä oleva tilajoukko	Tulosjoukkoon lisättävät tilat
1	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$	$\emptyset$

On siis saatu tulos



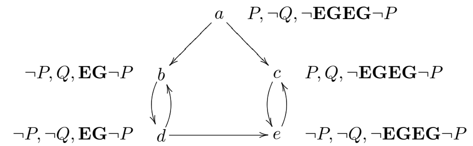
Lasketaan seuraavaksi lauseen $\mathbf{EGEG}\neg P$ totuusarvot käyttämällä uudelleen CheckEG-algoritmia. Muodostetaan siis mallin $\mathcal{M}$ rajoittuma $\mathcal{M}''$ niihin tiloihin, joissa $\mathbf{EG}\neg P$ pätee:



Ainoa mallin $\mathcal{M}''$ ei-triviaali vahvasti kytketty komponentti on $\{b, d\}$. CheckEG-algoritmi pysähtyy jälleen ensimmäisen kierroksen jälkeen:

Kierros	Tulosjoukko	Käsiteltävänä oleva tilajoukko	Tulosjoukkoon lisättävät tilat
1	$\{b, d\}$	$\{b, d\}$	$\emptyset$

Lause $\mathbf{EGEG}\neg P$ pätee siis tiloissa b ja d, jolloin sen negaatio pätee tiloissa



Alilauseen $\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P)$ totuusarvo voidaan laskea CheckEU-algoritmin avulla:

Kierros	Tulosjoukko	Käsiteltävänä oleva tilajoukko	Tulosjoukkoon lisättävät tilat
1	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	$\{e\}$
2	$\{a, c, e\}$	$\{e\}$	$\{d\}$
3	$\{a, c, d, e\}$	$\{d\}$	$\{b\}$
4	$\{a, b, c, d, e\}$	$\{b\}$	$\emptyset$

Lause $\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P)$ pätee kaikissa mallin $\mathcal{M}$ tiloissa, joten lauseen negaatio $\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P)$ ei päde missään mallin tilassa. Tästä seuraa, ettei myöskään konjunktio $\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P$ toteudu missään mallin tilassa.

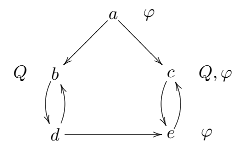
Sovelletaan sitten uudelleen CheckEU-algoritmia lauseeseen $\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big)$. Algoritmi päättyy heti, sillä edellisen perusteella jo algoritmin lähtötilajoukko on tyhjä.

Kierros	Tulosjoukko	Käsiteltävänä oleva tilajoukko	Tulosjoukkoon lisättävät tilat
1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Lause $\neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big)$ pätee nyt mallin kaikissa tiloissa. Koska aiemmin todettiin, että lause $\neg\mathbf{EGEG}\neg P$ toteutuu tilajoukossa $\{a, c, e\}$, saadaan konjunktiolle

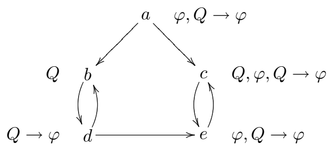
$$\varphi = \neg\mathbf{E}\big((\mathbf{EG}\neg P)\mathbf{U}(\neg\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P) \wedge \mathbf{EG}\neg P)\big) \wedge \neg\mathbf{EGEG}\neg P$$

tulos

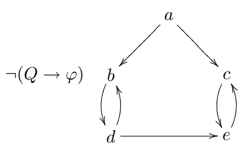


(Yllä olevassa kuviossa on tiloihin merkitty enää vain ne alilauseet, joiden totuusarvoja tarvitaan vielä jäljellä olevien alilauseiden totuusarvojen laskemiseksi.)

Alilause $Q \to \varphi$:

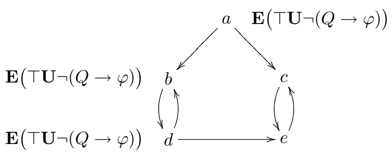


Alilause $\neg(Q \to \varphi)$:

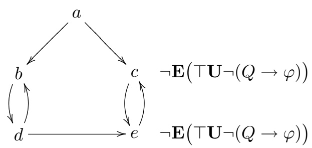


Lasketaan lauseen $\mathbf{E}\big(\top\mathbf{U}\neg(Q \to \varphi)\big)$ totuusarvot CheckEU-algoritmilla:

Kierros	Tulosjoukko	Käsiteltävänä oleva tilajoukko	Tulosjoukkoon lisättävät tilat
1	$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a, d\}$
2	$\{a, b, d\}$	$\{a, d\}$	$\emptyset$

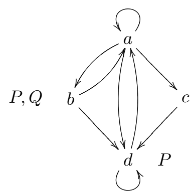


Lopputulokseksi saadaan viimein



T-79.5101 **kevät 2007**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 12
Ratkaisut

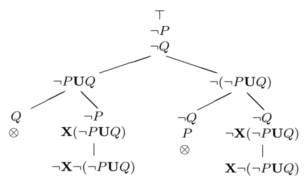
1. $\mathcal{M}$:



Lauseen $\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q)$ sulkeuma:

$$\begin{aligned}\mathrm{CL}\big(\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q)\big) = \big\{&\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q), \neg\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q), \neg P\mathbf{U}Q, \mathbf{X}\neg(\neg P\mathbf{U}Q),\\ &\neg(\neg P\mathbf{U}Q), \neg P, Q, \neg\mathbf{X}\neg(\neg P\mathbf{U}Q), P, \neg Q\big\}\end{aligned}$$

Muodostetaan atomit. Koska $v(a, P) = v(a, Q) =$ false, saadaan tilan a perusteella taulu



Taulun avoimista haaroista saadaan kelvolliset lausejoukot

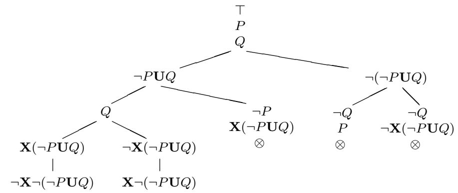
$$\begin{aligned}K_1 &= \big\{\top, \neg P, \neg Q, \neg P\mathbf{U}Q, \mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q), \neg\mathbf{X}\neg(\neg P\mathbf{U}Q)\big\}\\ K_2 &= \big\{\top, \neg P, \neg Q, \neg(\neg P\mathbf{U}Q), \neg\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q), \mathbf{X}\neg(\neg P\mathbf{U}Q)\big\}\end{aligned}$$

Tilasta a ja näistä lausejoukoista saadaan siten atomit (a, K_1) ja (a, K_2). (Lausejoukot K_1 ja K_2 ovat siis suurimmat mahdolliset $\mathrm{CL}\big(\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q)\big)$:n ristiriidattomat[1] osajoukot, jotka ovat yhtäpitäviä atomilauseiden valuaation kanssa tilassa a: minkä tahansa lauseen $\varphi \in \mathrm{CL}\big(\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q)\big) \setminus K_i$ lisääminen joukkoon K_i, $i \in \{1, 2\}$, tekisi lausejoukon ristiriitaiseksi.)

[1]Lausejoukko K on ristiriitainen, jos $\varphi, \neg\varphi \in K$ jollekin lauseelle φ.

Koska atomilauseilla P ja Q on tilassa c sama valuaatio kuin tilassa a, tilan c perusteella saadaan atomit (c, K_1) ja (c, K_2).

Muodostetaan taulu tilan b atomilauseiden valuaation perusteella:

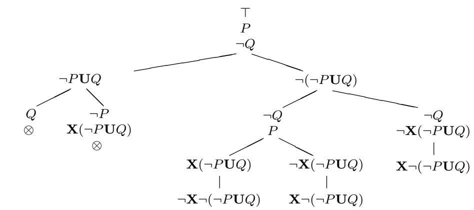


Taulun avoimista haaroista saadaan lausejoukot

$$\begin{aligned}K_3 &= \big\{\top, P, Q, \neg P\mathbf{U}Q, \mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q), \neg\mathbf{X}\neg(\neg P\mathbf{U}Q)\big\}\\ K_4 &= \big\{\top, P, Q, \neg P\mathbf{U}Q, \neg\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q), \mathbf{X}\neg(\neg P\mathbf{U}Q)\big\}\end{aligned}$$

Tilan b perusteella saadaan siis atomit (b, K_3) ja (b, K_4).

Muodostetaan vielä taulu tilan d suhteen:



Nyt saadaan lausejoukot

$$\begin{aligned}K_5 &= \big\{\top, P, \neg Q, \neg(\neg P\mathbf{U}Q), \mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q), \neg\mathbf{X}\neg(\neg P\mathbf{U}Q)\big\}\\ K_6 &= \big\{\top, P, \neg Q, \neg(\neg P\mathbf{U}Q), \neg\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q), \mathbf{X}\neg(\neg P\mathbf{U}Q)\big\}\end{aligned}$$

(lausejoukko K_6 saadaan kahdesta taulun avoimesta haarasta). Tilan d perusteella saadaan siis atomit (d, K_5) ja (d, K_6).

Muodostetaan graafi $G = (N, E)$, jonka solmujen joukko N koostuu kaikista edellä määritetyistä atomeista, ts.

$$N = \big\{(a, K_1), (a, K_2), (b, K_3), (b, K_4), (c, K_1), (c, K_2), (d, K_5), (d, K_6)\big\}$$

ja jonka kaaret toteuttavat seuraavan ehdon: atomista (s, K) on kaari atomiin (s', K'), jos ja vain, jos

(a) $\langle s, s' \rangle \in R$ (mallissa $\mathcal{M}$) ja

(b) kaikille K:n muotoa $\mathbf{X}\varphi$ oleville lauseille pätee $\varphi \in K'$.

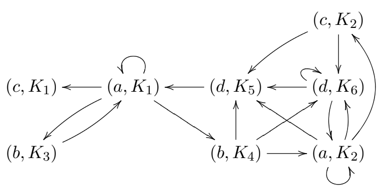
Jälkimmäisen ehdon tarkistamiseksi voidaan ensin muodostaa K_i-joukkojen välille "yhteensopivuusrelaatio", joka voidaan esittää taulukkona seuraavasti:

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
K_1	×		×	×		
K_2		×			×	×
K_3	×		×	×		
K_4		×			×	×
K_5	×		×	×		
K_6		×			×	×

Taulukon i:nnen rivin j:nnessä sarakkeessa on rasti, jos ja vain, jos kaikille lauseille $\mathbf{X}\varphi \in K_i$ pätee $\varphi \in K_j$: esimerkiksi pari (K_1, K_3) toteuttaa ehdon, koska $\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q) \in K_1$ on K_1:n ainoa muotoa $\mathbf{X}\varphi$ oleva lause ja $\neg P\mathbf{U}Q \in K_3$.

Ehdot (a) ja (b) voidaan nyt tarkistaa relaation R ja yllä olevan taulukon avulla. Esimerkiksi atomista (b, K_3) voisi relaatiota R koskevan ehdon (a) perusteella olla kaari mihin tahansa atomeista $\big\{(a, K_1), (a, K_2), (d, K_5), (d, K_6)\big\}$; koska K-joukkojen välinen ehto ei kuitenkaan yllä olevan taulukon perusteella päde pareille (K_3, K_2), (K_3, K_5) ja (K_3, K_6), jäljelle jää ainoastaan kaari $\big\langle (b, K_3), (a, K_1) \big\rangle$.

Graafiksi G saadaan

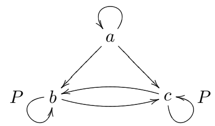


Lauseen $\mathbf{EX}(\neg P\mathbf{U}Q)$ toteutuvuuden määrittämiseksi tilassa a tutkitaan, onko graafissa G polkua, joka alkaa jostakin atomista (a, K) $(K \in \{K_1, \ldots, K_6\})$ siten, että lause $\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q)$ kuuluu joukkoon K, ja polku johtaa johonkin itsetoteutuvaan ei-triviaaliin vahvasti kytkettyyn komponenttiin. (Vahvasti kytketty komponentti $C \subseteq N$ on itsetoteutuva, jos kaikkien atomien $(s, K) \in C$ kaikille joukkoon K kuuluville muotoa $\varphi\mathbf{U}\psi$ oleville lauseille on olemassa atomi $(s', K') \in C$ siten, että $\psi \in K'$.)

Graafin G ainoa ei-triviaali vahvasti kytketty komponentti on $C = \big\{(a, K_1), (a, K_2), (b, K_3), (b, K_4), (c, K_2), (d, K_5), (d, K_6)\big\}$. Tämä komponentti on myös itsetoteutuva, sillä ainoa C:n solmuissa esiintyvä muotoa $\varphi\mathbf{U}\psi$ oleva lause on $\neg P\mathbf{U}Q$, ja C sisältää esim. atomin (b, K_3), jolle pätee $Q \in K_3$.

Nähdään, että komponentti C on saavutettavissa esimerkiksi atomista (a, K_1) (koska $(a, K_1) \in C$)). Koska $\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q) \in K_1$, seuraa, että $\mathcal{M}, a \models \mathbf{EX}(\neg P\mathbf{U}Q)$ pätee.

2. $\mathcal{M}$:



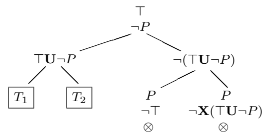
$\mathcal{M}, a \models \mathbf{AFG}P$ pätee, jos ja vain, jos $\mathcal{M}, a \models \neg\mathbf{E}\neg\mathbf{FG}P$ pätee, jos ja vain, jos $\mathcal{M}, a \not\models \mathbf{E}\neg\mathbf{FG}P$. Tutkitaan siis, päteekö $\mathcal{M}, a \models \mathbf{E}\neg\mathbf{FG}P$. Kirjoitetaan lause $\neg\mathbf{FG}P$ käyttämällä ainoastaan $\mathbf{X}$- ja $\mathbf{U}$-temporaalikonnektiiveja:

$$\begin{aligned}
\neg\mathbf{FG}P &\equiv \neg\mathbf{F}\neg\mathbf{F}\neg P \\
&\equiv \neg\mathbf{F}\neg(\top\mathbf{U}\neg P) \\
&\equiv \neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)
\end{aligned}$$

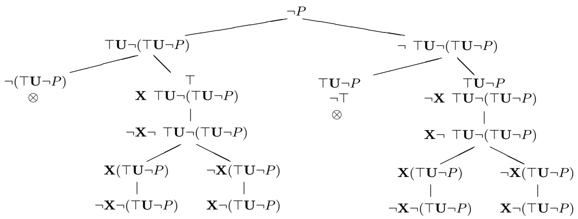
Lauseen $\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)$ sulkeuma:

$$\begin{aligned}
\mathrm{CL}\big(\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)\big) = \big\{&\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \\
&\top, \neg(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \neg\top, \\
&\top\mathbf{U}\neg P, \neg\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \neg P, \\
&\mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), P, \\
&\neg\mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \\
&\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big\}
\end{aligned}$$

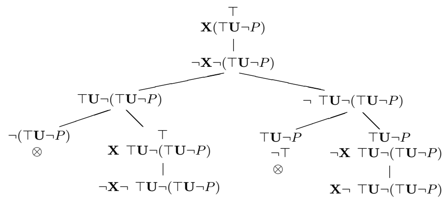
Muodostetaan atomit. Koska $v(a, P) = \text{false}$, saadaan tilan a perusteella taulu



jossa haara T_1 on



ja haara T_2 on



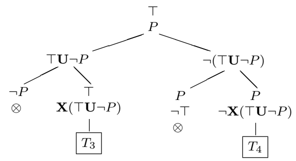
Taulun avoimien haarojen perusteella saadaan nyt lausejoukot

$$\begin{aligned}
K_1 = \{&\top, \neg P, \top\mathbf{U}\neg P, \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big),\\
&\neg\mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\}\\
K_2 = \{&\top, \neg P, \top\mathbf{U}\neg P, \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big),\\
&\neg\mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \neg\mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\}\\
K_3 = \{&\top, \neg P, \top\mathbf{U}\neg P, \neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \neg\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big),\\
&\mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\}\\
K_4 = \{&\top, \neg P, \top\mathbf{U}\neg P, \neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \neg\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big),\\
&\mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \neg\mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\}
\end{aligned}$$

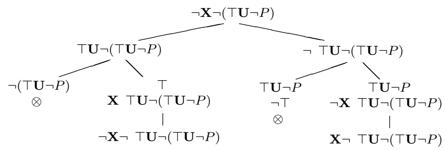
$$\begin{aligned}
K_5 = \{&\top, \neg P, \top\mathbf{U}\neg P, \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P),\\
&\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \neg\mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)\}\\
K_6 = \{&\top, \neg P, \top\mathbf{U}\neg P, \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big),\\
&\neg\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)\}
\end{aligned}$$

Näin saadaan atomit (a, K_1), (a, K_2), (a, K_3), (a, K_4), (a, K_5) ja (a, K_6).

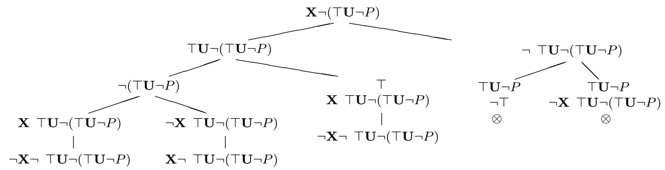
Koska $v(b, P) = v(c, P) = \text{true}$, tilojen b:n ja c:n perusteella saadaan taulu



jossa haara T_3 on



ja haara T_4 on



Näin saadaan lausejoukot

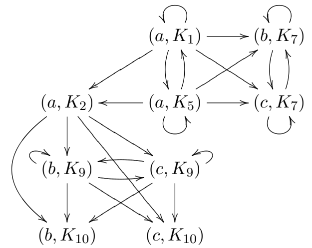
$$
\begin{aligned}
K_7 &= \big\{\top, P, \top\mathbf{U}\neg P, \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P),\\
&\quad \mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \neg\mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)\big\}\\
K_8 &= \big\{\top, P, \top\mathbf{U}\neg P, \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big),\\
&\quad \neg\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)\big\}\\
K_9 &= \big\{\top, P, \neg(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P),\\
&\quad \mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \neg\mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)\big\}\\
K_{10} &= \big\{\top, P, \neg(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P),\\
&\quad \neg\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)\big\}
\end{aligned}
$$

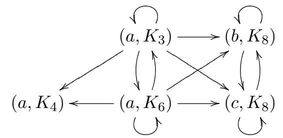
(lausejoukko K_9 saadaan taulun kahdesta haarasta). Näin saadaan atomit (b, K_7), (b, K_8), (b, K_9), (b, K_{10}) sekä (c, K_7), (c, K_8), (c, K_9) ja (c, K_{10}).

K-joukkojen välinen "yhteensopivuusrelaatio" on nyt seuraava:

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}
K_1	×	×			×		×			
K_2									×	×
K_3			×	×		×		×		
K_4										
K_5	×	×			×		×			
K_6			×	×		×		×		
K_7	×	×			×		×			
K_8			×	×		×		×		
K_9									×	×
K_{10}										

Graafi G:





G:n ei-triviaalit vahvasti kytketyt komponentit ovat

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \big\{(a, K_1), (a, K_5)\big\}\\
C_2 &= \big\{(a, K_3), (a, K_6)\big\}\\
C_3 &= \big\{(b, K_7), (c, K_7)\big\}\\
C_4 &= \big\{(b, K_8), (c, K_8)\big\}\\
C_5 &= \big\{(b, K_9), (c, K_9)\big\}
\end{aligned}
$$

Näistä komponenteista C_2 ja C_5 ovat itsetoteutuvia. On siis tutkittava, onko jompikumpi näistä komponenteista saavutettavissa jostakin graafin solmusta (a, K), missä $\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big) \in K$. Koska lause $\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)$ kuuluu esimerkiksi joukkoon K_6 ja C_2 on saavutettavissa solmusta (a, K_6) (koska $(a, K_6) \in C_2$), seuraa, että $\mathcal{M}, a \models \mathbf{E}\neg\mathbf{FG}P$ pätee. Siten $\mathcal{M}, a \models \mathbf{AFG}P$ *ei* päde mallissa $\mathcal{M}$.

T-79.5101 **kevät 2007**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 13
Ratkaisut

1. Aloitetaan lauseen negaatiosta

$$\neg\Big(\big(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \rightarrow \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)\Big).$$

Muunnetaan lause positiiviseen normaalimuotoon:

$$\big(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \wedge \neg\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$$
$$\big(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)$$

Muodostetaan taulu. Aloitetaan OR-solmusta

$$D_0 = \Big\{\big(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)\Big\},$$

jonka AND-seuraajat ovat

$$\begin{aligned}
C_0 = \Big\{&\big(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \neg P\Big\}\\
C_1 = \Big\{&\big(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)\Big\}\\
C_2 = \Big\{&\big(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), P, \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \neg Q,\\
&\neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \neg P\Big\}\\
C_3 = \Big\{&\big(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), P, \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \neg Q,\\
&\neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)\Big\}
\end{aligned}$$

Solmut C_0, C_1 ja C_2 voidaan karsia pois, koska ne sisältävät jonkin lauseen ja sen negaation. (Ristiriitaisten AND-solmujen karsintasääntöjä voidaan siis työmäärän vähentämiseksi soveltaa jo AND-solmuja muodostettaessa; voidaan osoittaa, että millään solmulla, joka saataisiin edelleen generoimalla täydellisesti kaikki solmujen C_0, C_1 tai C_2 OR-seuraajat, näiden AND-seuraajat jne., ei ole merkitystä tutkittavana olevan lauseen toteutuvuustarkistuksen kannalta lopullisessa taulussa. Tämä johtuu siitä, että mikään näin syntyvistä solmuista ei sisällä tutkittavana olevaa lausetta, eikä mikään jostakin muusta AND-solmusta lähtevä tulevaisuuspolku voi kulkea ristiriitaisen AND-solmun kautta.)

Koska solmu C_3 sisältää lauseet $\mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)$ ja $\mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)$, solmulle C_3 saadaan OR-seuraaja $D_1 = \big\{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)\big\}$.

D_1:n AND-seuraajat:

$$\begin{aligned}
C_4 &= D_1 \cup \big\{Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \neg P\big\}\\
C_5 &= D_1 \cup \big\{Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)\big\}\\
C_6 &= D_1 \cup \big\{P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), P, \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \neg Q,\\
&\qquad \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \neg P\big\}\\
C_7 &= D_1 \cup \big\{P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), P, \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \neg Q,\\
&\qquad \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)\big\}
\end{aligned}$$

Koska solmut C_4, C_5 ja C_6 ovat ristiriitaisia, ne voidaan karsia pois. Jäljelle jää solmu C_7, jolle saadaan OR-seuraaja $\big\{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)\big\} = D_1$.

AND-solmu C_7 karsitaan pois, sillä tämä solmu sisältää tulevaisuuslauseen $\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$, joka ei toteudu solmussa. Tämä johtuu siitä, että taulusta ei voida erottaa solmusta C_7 lähtevää luentokalvoissa esitetyt ehdot täyttävää asyklistä aligraafia, jonka kaikki lehtisolmut sisältäisivät lauseen Q, ja lause P olisi mukana kaikissa muissa aligraafin AND-solmuissa.

Solmun C_7 poistamisen jälkeen voidaan karsintasääntöjen perusteella poistaa järjestyksessä solmut D_1, C_3 ja D_0. Koska jäljelle jäävässä taulussa ei ole yhtään AND-solmua, joka sisältäisi lauseen

$$\big(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),$$

seuraa, että lause on toteutumaton. Siten lauseen negaatio (alkuperäinen lause) on pätevä.

2. Muunnetaan lause ensin positiiviseen normaalimuotoon.

$$\mathbf{GF}P \to \mathbf{GF}\neg P$$
$$\neg\mathbf{GF}P \vee \mathbf{GF}\neg P$$
$$\mathbf{FG}\neg P \vee \mathbf{GF}\neg P$$

Korvataan sitten lauseessa esiintyvät LTL:n konnektiivit **F** ja **G** CTL:n konnektiiveilla **AF** ja **AG**, jolloin saadaan CTL-lause

$$\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P.$$

Tämä CTL-lause on toteutuva, jos ja vain, jos alkuperäinen LTL-lause on toteutuva. Tutkitaan siis taulumenetelmällä, onko CTL-lause toteutuva. Taulun juurena on OR-solmu

$$D_0 = \{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P\}.$$

D_0:n AND-seuraajat:

$$C_0 = \big\{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AG}\neg P, \neg P, \mathbf{AXAG}\neg P\big\}$$
$$C_1 = \big\{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AXAFAG}\neg P\big\}$$
$$C_2 = \big\{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \neg P\big\}$$
$$C_3 = \big\{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \mathbf{AXAF}\neg P\big\}$$

C_0:n OR-seuraaja: $D_1 = \{\mathbf{AG}\neg P\}$
C_1:n OR-seuraaja: $D_2 = \{\mathbf{AFAG}\neg P\}$
C_2:n OR-seuraaja: $D_3 = \{\mathbf{AGAF}\neg P\}$
C_3:n OR-seuraaja: $D_4 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P\}$

D_1:n AND-seuraaja: $C_4 = \{\mathbf{AG}\neg P, \neg P, \mathbf{AXAG}\neg P\}$

D_2:n AND-seuraajat:

$$C_5 = \{\mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AG}\neg P, \neg P, \mathbf{AXAG}\neg P\}$$
$$C_6 = \{\mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AXAFAG}\neg P\}$$

D_3:n AND-seuraajat:

$$C_7 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \neg P\}$$
$$C_8 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \mathbf{AXAF}\neg P\}$$

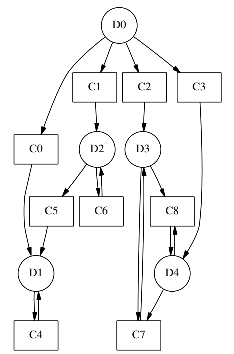
D_4:n AND-seuraajat:

$$C_9 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \neg P\} = C_7$$
$$C_{10} = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \mathbf{AXAF}\neg P\} = C_8$$

C_4:n OR-seuraaja: $D_5 = \{\mathbf{AG}\neg P\} = D_1$
C_5:n OR-seuraaja: $D_6 = \{\mathbf{AG}\neg P\} = D_1$
C_6:n OR-seuraaja: $D_7 = \{\mathbf{AFAG}\neg P\} = D_2$
C_7:n OR-seuraaja: $D_8 = \{\mathbf{AGAF}\neg P\} = D_3$
C_8:n OR-seuraaja: $D_9 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P\} = D_4$

Huomaa, että mikään yllä syntyvistä AND-solmuista ei ole ristiriitainen, joten solmujen karsinta ristiriitaisuuden perusteella ei tässä tehtävässä ole mahdollista.

Alustava taulu T_0:



Koska solmu C_4 ei sisällä keskenään ristiriitaisia lauseita eikä myöskään yhtään tulevaisuuslausetta, solmu C_4 jää myös lopulliseen tauluun. Tällöin OR-solmulle D_1 jää tauluun seuraaja, joten solmua D_1 ei myöskään karsita. Kaikki solmun C_0 seuraajat jäävät siis myös lopulliseen tauluun. Solmua C_0 ei karsita, koska se ei sisällä keskenään ristiriitaisia lauseita ja koska sen kaikki tulevaisuuslauseet (tässä tapauksessa vain yksi, $\mathbf{AFAG}\neg P$) toteutuvat alustavassa taulussa.

Seuraa, että T_0:sta saatava lopullinen taulu sisältää AND-solmun C_0, joka sisältää lauseen $\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P$. Todetaan, että tämä CTL-lause on toteutuva.

Solmujen C_0 ja C_4 avulla voidaan nyt muodostaa CTL-lauseelle malli

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] C_0 \arrow[r] & C_4 \arrow[loop right] \\ \neg P & \neg P \end{tikzcd}$$

Koska CTL-lause $\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P$ on toteutuva, seuraa, että myös LTL-lause $\mathbf{FG}\neg P \vee \mathbf{GF}\neg P \equiv \mathbf{GF}P \rightarrow \mathbf{GF}\neg P$ on toteutuva.