T-79.5101 **kevät 2007**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 8
Ratkaisut

1. **KB** on symmetristen kehysten joukko. Käännetään annettu lause predikaattilogiikkaan:

$$
\begin{aligned}
&\tau(\neg\Box\neg\Box\neg\Box\neg P \to \neg\Box\neg P, x)\\
&= \tau(\neg\Box\neg\Box\neg\Box\neg P, x) \to \tau(\neg\Box\neg P, x)\\
&= \neg\tau(\Box\neg\Box\neg\Box\neg P, x) \to \neg\tau(\Box\neg P, x)\\
&= \neg\forall y\ R(x,y) \to \tau(\neg\Box\neg\Box\neg P, y) \quad \to \neg\forall y\ R(x,y) \to \tau(\neg P, y)\\
&= \neg\forall y\ R(x,y) \to \neg\tau(\Box\neg\Box\neg P, y) \quad \to \neg\forall y\ R(x,y) \to \neg\tau(P, y)\\
&= \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg\forall x\ \ R(y,x) \to \tau(\neg\Box\neg P, x) \qquad \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg P(y)\\
&= \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg\forall x\ \ R(y,x) \to \neg\tau(\Box\neg P, x) \qquad \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg P(y)\\
&= \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg\forall x\ \ R(y,x) \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \tau(\neg P, y) \qquad \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg P(y)\\
&= \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg\forall x\ \ R(y,x) \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg\tau(P, y) \qquad \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg P(y)\\
&= \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg\forall x\ \ R(y,x) \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg P(y) \qquad \to \neg\forall y\ \ R(x,y) \to \neg P(y)\\
&= \varphi
\end{aligned}
$$

Myös kehysaksiooma esitetään predikaattilogiikan lauseena, jolloin saadaan lause

$$\forall x \forall y \big(R(x,y) \to R(y,x)\big) \qquad \text{(symmetrisyys)}$$

Tämä lause otetaan mukaan taulutodistukseen merkitsemällä se taulun juureen todeksi. Lisäksi tauluun merkitään lause $\forall x\varphi$ epätodeksi.

Muodostetaan taulu:

1.	$\forall x\forall y\ R(x,y) \to R(y,x)$	
2.	$\neg\forall x\ \neg\forall y\ R(x,y) \to \neg\forall x\ R(y,x) \to \neg\forall y\ R(x,y) \to \neg P(y) \quad \to \neg\forall y\ R(x,y) \to \neg P(y)$	
3.	$\neg\ \neg\forall y\ R(c,y) \to \neg\forall x\ R(y,x) \to \neg\forall y\ R(x,y) \to \neg P(y) \quad \to \neg\forall y\ R(c,y) \to \neg P(y)$	$(2,\ x/c)$
4.	$\neg\forall y\ R(c,y) \to \neg\forall x\ R(y,x) \to \neg\forall y\ R(x,y) \to \neg P(y)$	(3)
5.	$\neg\neg\forall y\ R(c,y) \to \neg P(y)$	(3)
6.	$\neg\ R(c,d) \to \neg\forall x\ R(d,x) \to \neg\forall y\ R(x,y) \to \neg P(y)$	$(4,\ y/d)$
7.	$\forall y\ R(c,y) \to \neg P(y)$	(5)
8.	$R(c,d)$	(6)
9.	$\neg\neg\forall x\ R(d,x) \to \neg\forall y\ R(x,y) \to \neg P(y)$	(6)
10.	$\forall x\ R(d,x) \to \neg\forall y\ R(x,y) \to \neg P(y)$	(9)
11.	$R(d,c) \to \neg\forall y\ R(c,y) \to \neg P(y)$	$(10,\ x/c)$

12. $\neg R(d,c)$	(11)	13. $\neg\forall y\ R(c,y) \to \neg P(y)$	(11)
14. $\forall y\ R(c,y) \to R(y,c)$	$(1,\ x/c)$	18. $\neg\ R(c,e) \to \neg P(e)$	$(13,\ y/e)$
15. $R(c,d) \to R(d,c)$	$(14,\ y/d)$	19. $R(c,e)$	(18)
16. $\neg R(c,d)$ (15) $\otimes$ | 17. $R(d,c)$ (15) $\otimes$		20. $\neg\neg P(e)$	(18)
		21. $R(c,e) \to \neg P(e)$	$(7,\ y/e)$
		22. $\neg R(c,e)$ (21) $\otimes$ | 23. $\neg P(e)$ $\otimes$	(21)

2. a) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_1P$, koska $v(s_1, P) = v(s_2, P) =$ true, ja
$\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_2P$ ja $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_3P$, koska $v(s_1, P) =$ true . Siten
$\mathcal{M}, s_1 \Vdash EP$.

   b) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_2EP$ ja $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_3EP$, koska $\mathcal{M}, s_1 \Vdash EP$. Lisäksi
$\mathcal{M}, s_2 \Vdash K_1P$, koska $v(s_1, P) = v(s_2, P) =$ true,
$\mathcal{M}, s_2 \Vdash K_2P$, koska $v(s_2, P) = v(s_3, P) =$ true ja
$\mathcal{M}, s_2 \Vdash K_3P$, koska $v(s_2, P) =$ true. Siten
$\mathcal{M}, s_2 \Vdash EP$, mistä seuraa, että
$\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_1EP$. Siis
$\mathcal{M}, s_1 \Vdash EEP$.

   Toisaalta tulos saadaan myös, jos huomataan, että P on tosi kaikissa maailmoissa, jotka ovat saavutettavissa s_1:stä kahdella askeleella.

   c) $\mathcal{M}, s_1 \nVdash CP$, koska s_4 on C-saavutettavissa s_1:stä ja $v(s_4, P) =$ false.

3. Olkoon φ lause, joka ei ole **S5**-pätevä. Tällöin sillä on olemassa universaali vastamalli $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, jossa on maailma $s \in S$, jolle $\mathcal{M}, s \nVdash \varphi$.

Olkoon

$$F = \{\Box\psi \mid \Box\psi \text{ on } \varphi\text{:n alilause ja } \mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box\psi\}.$$

Silloin jokaista lausetta $\Box\psi \in F$ vastaa maailma $s_\psi \in S$ siten, että $\langle s, s_\psi\rangle \in R$ ja

$$\mathcal{M}, s_\psi \Vdash \neg\psi.$$

Olkoon $\mathcal{M}' = \langle S', R', v'\rangle$, missä

$$S' = \{s\} \cup \{s_\psi \mid \Box\psi \in F\} \subseteq S,$$

$R' = S' \times S'$ ja $v'(s', P) = v(s', P)$ kaikille φ:ssä esiintyville atomilauseille P ja kaikille $s' \in S'$. Koska $|F| < |\mathrm{Sub}(\varphi)|$, on silloin $|S'| \le |\mathrm{Sub}(\varphi)|$. ($|\mathrm{Sub}(\varphi)|$ on φ:n alilauseiden lukumäärä.)

Osoitetaan induktiolla, että jokaiselle $s' \in S'$ ja jokaiselle φ:n alilauseelle ψ pätee

$$\mathcal{M}, s' \Vdash \psi \quad \text{joss} \quad \mathcal{M}', s' \Vdash \psi.$$

Perustapaus (alilause on atomilause) on triviaali. Myös muotoa $\psi' \wedge \psi''$ ja $\neg\psi$ olevien alilauseiden induktioaskeleet seuraavat heti. Olkoon sitten alilause muotoa $\Box\psi$. Olkoon $s' \in S'$.

Jos $\mathcal{M}, s' \Vdash \Box\psi$, niin $\mathcal{M}, t \Vdash \psi$ kaikilla $t \in S'$, koska $\mathcal{M}$ on universaali. Induktio-oletuksen perusteella $\mathcal{M}', t \Vdash \psi$ kaikilla $t \in S'$, mistä seuraa, että $\mathcal{M}', s' \Vdash \Box\psi$.

Toisaalta, jos $\mathcal{M}, s' \nVdash \Box\psi$, niin $\mathcal{M}, t \Vdash \neg\Box\psi$ kaikilla $t \in S'$, koska $\mathcal{M}$ on universaali. Erityisesti $\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box\psi$, ja siksi $\Box\psi \in F$. On siis olemassa maailma $s_\psi \in S'$ siten, että $\langle s, s_\psi \rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s_\psi \Vdash \neg\psi$, eli $\mathcal{M}, s_\psi \nVdash \psi$. Induktio-oletuksen perusteella seuraa, että $\mathcal{M}', s_\psi \nVdash \psi$, joten $\mathcal{M}', s_\psi \Vdash \neg\psi$. Koska myös $\mathcal{M}'$ on universaali, seuraa, että $\mathcal{M}', s' \nVdash \Box\psi$.

Koska erityisesti $s \in S'$ ja $\mathcal{M}, s \nVdash \varphi$, yllä olevan tuloksen perusteella seuraa, että $\mathcal{M}', s \nVdash \varphi$. Siten myös $\mathcal{M}'$ on vastamalli φ:lle.

Jos φ ei ole **S5**-pätevä, on olemassa universaali vastamalli $\mathcal{M}$ ja maailma s siten, että $\mathcal{M}, s \nVdash \varphi$. Yllä olevan konstruktion avulla saadaan φ:lle toinen universaali vastamalli $\mathcal{M}'$, jossa on korkeintaan $|\mathrm{Sub}(\varphi)|$ maailmaa.

T-79.5101 **kevät 2007**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 9
Ratkaisut

1. Perusoperaattori

$$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AX}P, \text{ joss } \mathcal{M}, t \models P \text{ kaikille } t, \text{ joille } sRt$$

Korvataan P $\neg P$:llä:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}, s \models \mathbf{AX}\neg P, \text{ joss } \mathcal{M}, t \models \neg P \text{ kaikille } t, \text{ joille } sRt\\
&\mathcal{M}, s \not\models \mathbf{AX}\neg P, \text{ joss } \mathcal{M}, t \not\models \neg P \text{ jollekin } t, \text{ jolle } sRt\\
&\mathcal{M}, s \models \neg\mathbf{AX}\neg P, \text{ joss } \mathcal{M}, t \not\models \neg P \text{ jollekin } t, \text{ jolle } sRt\\
&\mathcal{M}, s \models \mathbf{EX}P, \text{ joss } \mathcal{M}, t \models P \text{ jollekin } t, \text{ jolle } sRt
\end{aligned}$$

Perusoperaattori

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models Q$, ja kaikille $j < i$ pätee $\mathcal{M}, s_j \models P$

Tehdään korvaukset $P \to \top$, $Q \to P$:

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{A}(\top\mathbf{U}P)$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models P$ ja kaikille $j < i$ pätee $\mathcal{M}, s_j \models \top$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models P$

Perusoperaattori

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models Q$ ja kaikille $j < i$ pätee $\mathcal{M}, s_j \models P$

Tehdään korvaukset $P \to \top$, $Q \to P$:

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{E}(\top \mathbf{U} P)$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models P$ ja kaikille $j < i$ pätee $\mathcal{M}, s_j \models \top$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{EF}P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models P$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{EF}P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models P$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{EF}\neg P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models \neg P$

$\mathcal{M}, s \not\models \mathbf{EF}\neg P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja kaikille i pätee $\mathcal{M}, s_i \not\models \neg P$

$\mathcal{M}, s \models \neg\mathbf{EF}\neg P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja kaikille i pätee $\mathcal{M}, s_i \not\models \neg P$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AG}P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja kaikille i pätee $\mathcal{M}, s_i \models P$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models P$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}\neg P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models \neg P$

$\mathcal{M}, s \not\models \mathbf{AF}\neg P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, siten, että kaikille i pätee $\mathcal{M}, s_i \not\models \neg P$

$\mathcal{M}, s \models \neg\mathbf{AF}\neg P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, siten, että kaikille i pätee $\mathcal{M}, s_i \not\models \neg P$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{EG}P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, siten, että kaikille i pätee $\mathcal{M}, s_i \models P$

2.

$\mathcal{M}, x \models P\mathbf{U}Q$, joss on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, x^i \models Q$ ja kaikille $j < i$ pätee $\mathcal{M}, x^j \models P$

$\mathcal{M}, x \models \top\mathbf{U}P$, joss on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, x^i \models P$ ja kaikille $j < i$ pätee $\mathcal{M}, x^j \models \top$

$\mathcal{M}, x \models \mathbf{F}P$, joss on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, x^i \models P$

$\mathcal{M}, x \models \mathbf{F}P$, joss on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, x^i \models P$

$\mathcal{M}, x \models \mathbf{F}\neg P$, joss on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, x^i \models \neg P$

$\mathcal{M}, x \not\models \mathbf{F}\neg P$, joss kaikille i pätee $\mathcal{M}, x^i \not\models \neg P$

$\mathcal{M}, x \models \neg\mathbf{F}\neg P$, joss kaikille i pätee $\mathcal{M}, x^i \not\models \neg P$

$\mathcal{M}, x \models \mathbf{G}P$, joss kaikille i pätee $\mathcal{M}, x^i \models P$

$\mathcal{M}, x \models P\mathbf{U}Q$, joss on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, x^i \models Q$ ja kaikille $j < i$ pätee $\mathcal{M}, x^j \models P$

$\mathcal{M}, x \models (\neg P)\mathbf{U}(\neg Q)$, joss on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, x^i \models \neg Q$ ja kaikille $j < i$ pätee $\mathcal{M}, x^j \models \neg P$

$\mathcal{M}, x \not\models (\neg P)\mathbf{U}(\neg Q)$, joss kaikille i: joko $\mathcal{M}, x^i \not\models \neg Q$, tai on olemassa $j < i$ siten, että $\mathcal{M}, x^j \not\models \neg P$

$\mathcal{M}, x \models \neg\big((\neg P)\mathbf{U}(\neg Q)\big)$, joss kaikille i: jos $\mathcal{M}, x^i \models \neg Q$, niin silloin on olemassa $j < i$ siten, että $\mathcal{M}, x^j \not\models \neg P$

$\mathcal{M}, x \models P\mathbf{R}Q$, joss kaikille i: jos $\mathcal{M}, x^i \not\models Q$, niin silloin on olemassa $j < i$ siten, että $\mathcal{M}, x^j \models P$

3. Määritellään esim.

$$\begin{array}{ll} v(s_0, P) = \text{true} & v(s_0, Q) = \text{false} \\ v(s_1, P) = \text{false} & v(s_1, Q) = \text{true} \\ v(s_2, P) = \text{false} & v(s_2, Q) = \text{false}, \end{array}$$

jolloin saadaan malli

$$\begin{tikzcd} s_0 \arrow[r] & s_1 \arrow[r] & s_2 \arrow[loop above] \\ P, \neg Q & \neg P, Q & \neg P, \neg Q \end{tikzcd}$$

Nyt täydelle polulle $x = (s_0, s_1, s_2, s_2, s_2, \ldots)$ pätee

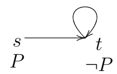
$$\mathcal{M}, x \models P\mathbf{U}Q, \text{ koska } \mathcal{M}, x^1 \models Q \text{ ja } \mathcal{M}, x^j \models P \text{ pätee kaikille } j < 1,$$

mutta $\mathcal{M}, x \not\models Q\mathbf{R}P$, koska $\mathcal{M}, x^1 \not\models P$, mutta ei ole olemassa sellaista $j < 1$, jolle pätisi $\mathcal{M}, x^j \models Q$.

T-79.5101 **kevät 2007**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 10
Ratkaisut

1. a) $P \wedge \mathbf{EF}Q$
   b) $\mathbf{EF}(P \wedge \mathbf{AXAG}\neg P)$
   c) $\mathbf{AG}\big(P \rightarrow \mathbf{AX}(P \rightarrow \mathbf{EF}Q)\big)$
   d) $\big(P \rightarrow \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)\big) \wedge \big(\neg P \rightarrow \mathbf{AX}(P \vee \mathbf{AX}P)\big)$
   e) $\mathbf{E}\big(P\mathbf{UAG}((Q \rightarrow \mathbf{AX}\neg Q) \wedge (\neg Q \rightarrow \mathbf{AX}Q))\big)$
   f) $\mathbf{AG}\big(P \rightarrow \mathbf{AG}(\neg Q \wedge \neg R)\big) \wedge \mathbf{AG}\big((Q \vee R) \rightarrow \mathbf{AG}\neg P\big)$

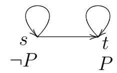
2. a) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \big\{\langle s, t\rangle, \langle t, t\rangle\big\}$, $v(s, P) =$ true ja $v(t, P) =$ false.



   $\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}P$ pätee, koska $(s, t, t, t, \ldots)$ on ainoa s:stä alkava täysi polku, ja tällä polulla on tila s, jolle pätee $\mathcal{M}, s \models P$. Siten $\mathbf{AF}P$ on toteutuva.

   Jotta $\mathbf{GF}P$ toteutuisi mallissa $\mathcal{M}$, tulisi mallissa silloin olla olemassa täysi polku x, jolle $\mathcal{M}, x \models \mathbf{GF}P$, jolloin $\mathcal{M}, x^i \models \mathbf{F}P$ pätisi kaikille $i \geq 0$, eli kaikille $i \geq 0$ olisi olemassa $j \geq i$ siten, että $\mathcal{M}, x^j \models P$. Toisin sanoen P:n pitäisi toteutua polun x *äärettömän monessa* (äärettömässä) loppuosassa. Tällaisia polkuja ei kuitenkaan ole, sillä $\mathcal{M}$:n ainoat täydet polut ovat $(s, t, t, t, \ldots)$ ja $(t, t, t, \ldots)$, ja P pätee ainoastaan äärellisen monessa näiden polkujen äärettömässä loppuosassa. Lause $\mathbf{GF}P$ ei siis ole toteutuva mallissa $\mathcal{M}$.

   b) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \big\{\langle s, s\rangle, \langle s, t\rangle, \langle t, t\rangle\big\}$, $v(s, P) =$ false ja $v(t, P) =$ true.

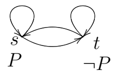


   $\mathcal{M}, s \models \mathbf{EFAG}P$ ja $\mathcal{M}, t \models \mathbf{EFAG}P$ pätevät, koska malli sisältää täydet polut $(s, t, t, t, \ldots)$ ja $(t, t, t, \ldots)$, jotka kulkevat tilan t

kautta, jolle selvästi pätee $\mathcal{M}, t \models \mathbf{AG}P$. Lause $\mathbf{EFAG}P$ on siis pätevä mallissa.

Lause $\mathbf{FG}P$ ei kuitenkaan ole pätevä mallissa, sillä täydellä polulla $(s, s, s, \ldots)$ ei ole ääretöntä loppuosaa x siten, että $\mathcal{M}, x^i \models P$ pätisi kaikille i (koska $v(s, P) = \text{false}$), jolloin siis $\mathcal{M}, (s, s, s, \ldots) \not\models \mathbf{FG}P$.

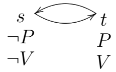
c) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s\rangle, \langle s, t\rangle, \langle t, s\rangle, \langle t, t\rangle\}$, $v(s, P) = \text{true}$ ja $v(t, P) = \text{false}$.



Lause $\mathbf{FX}P$ on toteutuva, sillä mallissa on (esim.) täysi polku $x = (t, s, s, s, \ldots)$, jolle $\mathcal{M}, x \models \mathbf{X}P$ (koska $v(s, P) = \text{true}$), ja siten $\mathcal{M}, x \models \mathbf{FX}P$.

Lause $\mathbf{EFAX}P$ ei kuitenkaan ole toteutuva missään mallin tilassa: jos lause toteutuisi, olisi mallissa olemassa tilasta s tai t lähtevä tilojen s ja t kautta kulkeva täysi polku, joka kulkisi lauseen $\mathbf{AX}P$ toteuttavan tilan kautta. Tulisi siis olla joko $\mathcal{M}, s \models \mathbf{AX}P$ tai $\mathcal{M}, t \models \mathbf{AX}P$; kumpikaan näistä ei kuitenkaan toteudu, sillä sekä s:llä että t:llä on R-relaatiossa seuraaja t, jolle $\mathcal{M}, t \not\models P$.

3. a) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle, \langle t, s\rangle\}$, $v(s, P) = v(s, V) = \text{false}$ ja $v(t, P) = v(t, V) = \text{true}$.

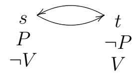


Tästä mallista voidaan erottaa täydet polut $x_1 = (s, t, s, t, \ldots)$ ja $x_2 = (t, s, t, s, \ldots)$.

- $\mathcal{M}, s \models \mathbf{E}(\neg V \mathbf{U} P)$ pätee, sillä $\mathcal{M}, x_1^1 \models P$ (koska $v(t, P) = \text{true}$), ja kaikille $i < 1$ pätee $\mathcal{M}, x_1^i \models \neg V$. Myös $\mathcal{M}, t \models \mathbf{E}(\neg V \mathbf{U} P)$ pätee, sillä x_2 on t:stä lähtevä täysi polku, ja $\mathcal{M}, x_2^0 \models P$.
- Koska $\mathcal{M}, x_1^0 \models \neg P$, niin $\mathcal{M}, s \models \mathbf{E}(V \mathbf{U} \neg P)$ pätee. Vastaavasti $\mathcal{M}, t \models \mathbf{E}(V \mathbf{U} \neg P)$ pätee, koska $\mathcal{M}, x_2^1 \models \neg P$, ja $\mathcal{M}, x_2^i \models V$ kaikille $i < 1$.
- $\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}(V \rightarrow \mathbf{AX}\neg V) \wedge \mathbf{EF}V$, sillä x_1 on ainoa s:stä alkava täysi polku, ja $\mathcal{M}, x_1 \models \mathbf{F}(V \rightarrow \mathbf{AX}\neg V)$ (koska selvästi esim. $\mathcal{M}, x_1^0 \models V \rightarrow \mathbf{AX}\neg V$, koska $v(s, V) = \text{false}$) ja lisäksi $\mathcal{M}, x_1 \models \mathbf{F}V$, koska polku x_1 kulkee tilan t kautta, ja $v(t, V) = \text{true}$.

  Samalla tavoin havaitaan, että $\mathcal{M}, t \models \mathbf{AF}(V \rightarrow \mathbf{AX}\neg V) \wedge \mathbf{EF}V$, sillä x_2 on ainoa t:stä alkava täysi polku, ja x_2:lle pätee $\mathcal{M}, x_2^0 \models \mathbf{AX}\neg V$, koska $\mathcal{M}, t \models \mathbf{AX}\neg V$ (ainoa t:n seuraaja on s, ja $v(s, V) = \text{false}$). Myös $\mathcal{M}, t \models \mathbf{EF}V$ pätee, koska t:stä lähtevälle täydelle polulle x_2 pätee $\mathcal{M}, x_2^0 \models V$ (koska $v(t, V) = \text{true}$).

b) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle, \langle t, s\rangle\}$, $v(t, P) = v(s, V) = \text{false}$ ja $v(s, P) = v(t, V) = \text{true}$.



Mallista $\mathcal{M}$ voidaan jälleen erottaa kaksi täyttä polkua $x_1 = (s, t, s, t, \ldots)$ ja $x_2 = (t, s, t, s, \ldots)$.

- $\mathcal{M}, s \models \mathbf{AG}(P \rightarrow \mathbf{F}V)$, sillä x_1 on ainoa s:stä alkava täysi polku, ja $\mathcal{M}, x_1 \models \mathbf{G}(P \rightarrow \mathbf{F}V)$. Tämä puolestaan seuraa siitä, että $\mathcal{M}, x_1^{2k} \models \mathbf{F}V$ (koska $\mathcal{M}, x_1^{2k+1} \models V$) kaikilla $k \geq 0$ sekä siitä, että $\mathcal{M}, x_1^{2k+1} \not\models P$ kaikilla $k \geq 0$.

  Vastaavasti myös $\mathcal{M}, t \models \mathbf{AG}(P \rightarrow \mathbf{F}V)$ pätee, sillä x_2 on ainoa t:stä alkava täysi polku, ja $\mathcal{M}, x_2 \models \mathbf{G}(P \rightarrow \mathbf{F}V)$, koska $\mathcal{M}, x_2^{2k} \not\models P$ ja $\mathcal{M}, x_2^{2k+1} \models \mathbf{F}V$ kaikilla $k \geq 0$.
- $\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}\big(P \wedge \mathbf{F}(\neg P \wedge \mathbf{X}P)\big)$, sillä x_1 on ainoa s:stä alkava täysi polku, ja $\mathcal{M}, x_1^0 \models P \wedge \mathbf{F}(\neg P \wedge \mathbf{X}P)$, koska $\mathcal{M}, x_1^0 \models P$ ($v(s, P) = \text{true}$) ja $\mathcal{M}, x_1^0 \models \mathbf{F}(\neg P \wedge \mathbf{X}P)$, sillä $\mathcal{M}, x_1^1 \models \neg P \wedge \mathbf{X}P$ (koska $v(t, P) = \text{false}$ ja $\mathcal{M}, (x_1^1)^1 \models P$).

  Myös $\mathcal{M}, t \models \mathbf{AF}\big(P \wedge \mathbf{F}(\neg P \wedge \mathbf{X}P)\big)$ on voimassa, sillä x_2 on ainoa t:stä lähtevä täysi polku, ja koska $x_2^1 = x_1 = x_1^0$ ja $\mathcal{M}, x_1^0 \models P \wedge \mathbf{F}(\neg P \wedge \mathbf{X}P)$ (ks. yllä), $\mathcal{M}, x_2 \models \mathbf{F}\big(P \wedge \mathbf{F}(\neg P \wedge \mathbf{X}P)\big)$.
- $\mathcal{M}, s \models \mathbf{A}(\neg V \mathbf{U} V)$, sillä x_1 on ainoa s:stä alkava täysi polku, ja $\mathcal{M}, x_1 \models \neg V \mathbf{U} V$, koska $\mathcal{M}, x_1^1 \models V$ ($v(t, V) = \text{true}$) ja $\mathcal{M}, x_1^i \models \neg V$ kaikille $i < 1$ ($v(s, V) = \text{false}$).

  Koska $v(t, V) = \text{true}$, $\mathcal{M}, x \models \neg V \mathbf{U} V$ pätee kaikille t:stä alkaville täysille poluille x. Tästä seuraa, että $\mathcal{M}, t \models \mathbf{A}(\neg V \mathbf{U} V)$ pätee.