

1. **“Komplementti puuttuu” -sääntö.** Olkoon klausuulijoukossa  $S$  klausuuli, joka sisältää literaalin  $L$ , mutta ei yhtään klausuulia, joka sisältää literaalin  $\bar{L}$ . Muunnetaan  $S$  poistamalla kaikki klausuulit, jotka sisältävät literaalin  $L$ . Malliehdoksi saadaan  $L$  on tosi.

Olkoon nyt  $S$  klausuulijoukko, joka sisältää literaalin  $L$ , mutta ei yhtään klausuulia, joka sisältää literaalin  $\bar{L}$  ja  $S_L$  joukosta  $S$  “komplementti puuttuu” -säännöllä saatava klausuulijoukko.

**Väite.** Joukko  $S$  on toteutuva  $\iff S_L$  on toteutuva.

**Todistus.**

( $\implies$ ) Olkoon  $S$  toteutuva, eli on olemassa totuusjakelu  $\mathcal{A}$  siten, että  $\mathcal{A} \models S$ . Oletetaan, että  $\mathcal{A} \not\models S_L$  (vasta oletus). Tällöin on olemassa klausuuli  $C \in S_L$  siten, että  $\mathcal{A} \not\models C$ . Kuitenkin pätee, että  $C' \in S$  kaikilla  $C' \in S_L$  ja koska  $\mathcal{A} \models S$ , pätee  $\mathcal{A} \models C$ , ristiriita.

( $\impliedby$ ) Olkoon  $S_L$  toteutuva, eli on olemassa totuusjakelu  $\mathcal{A}$  siten, että  $\mathcal{A} \models S_L$ . Koska  $L$  ei esiinny joukossa  $S_L$ , oletetaan  $\mathcal{A} \models L$ . Oletetaan  $\mathcal{A} \not\models S$  (vasta oletus) eli on olemassa klausuuli  $C \in S$  siten, että  $\mathcal{A} \not\models C$ .

- (a) Jos  $C$  sisältää literaalin  $L$ , pätee  $\mathcal{A} \models C$ , ristiriita.
- (b) Jos  $C$  ei sisällä kumpaakaan literaaleista  $L$  ja  $\bar{L}$  (muista, että  $\bar{L}$  ei esiinny joukossa  $S$ ),  $C \in S_L$  ja edelleen koska  $\mathcal{A} \models S_L$ , saadaan  $\mathcal{A} \models C$ , ristiriita.  $\square$

2. a)

$$\begin{aligned} & \{\neg A \vee B, \neg B \vee C, \neg C \vee D, \neg D\} \\ & \quad (\neg D) \\ & \{\neg A \vee B, \neg B \vee C, \neg C\} \\ & \quad (\neg C) \\ & \{\neg A \vee B, \neg B\} \\ & \quad (\neg B) \\ & \{\neg A\} \\ & \quad (\neg A) \\ & \{\} \end{aligned}$$

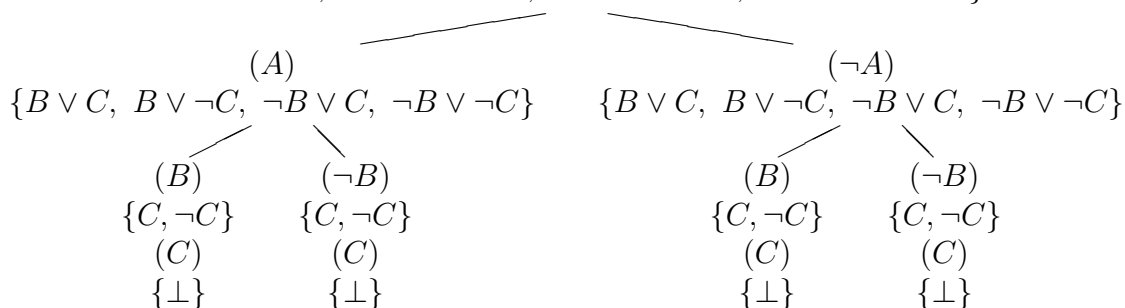
Klausuulijoukko on toteutuva.

b)

$$\begin{aligned}
 & \{A, \neg A \vee B, \neg B \vee \neg C \vee D, \neg D \vee E, E\} \\
 & \quad (\neg C) \\
 & \{A, \neg A \vee B, \neg D \vee E, E\} \\
 & \quad (\neg D) \\
 & \{A, \neg A \vee B, E\} \\
 & \quad (E) \\
 & \{A, \neg A \vee B\} \\
 & \quad (A) \\
 & \{B\} \\
 & \quad (B) \\
 & \{\}
 \end{aligned}$$

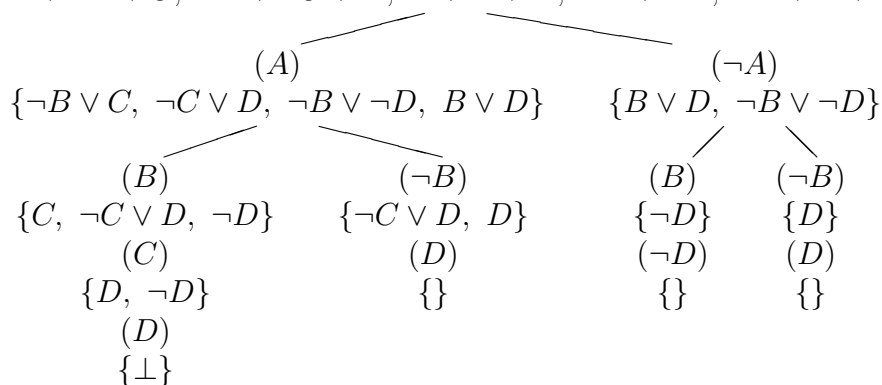
Klausuulijoukko on toteutuva.

c)

$$\{A \vee B \vee C, A \vee B \vee \neg C, A \vee \neg B \vee C, A \vee \neg B \vee \neg C, \neg A \vee B \vee C, \neg A \vee B \vee \neg C, \neg A \vee \neg B \vee C, \neg A \vee \neg B \vee \neg C\}$$


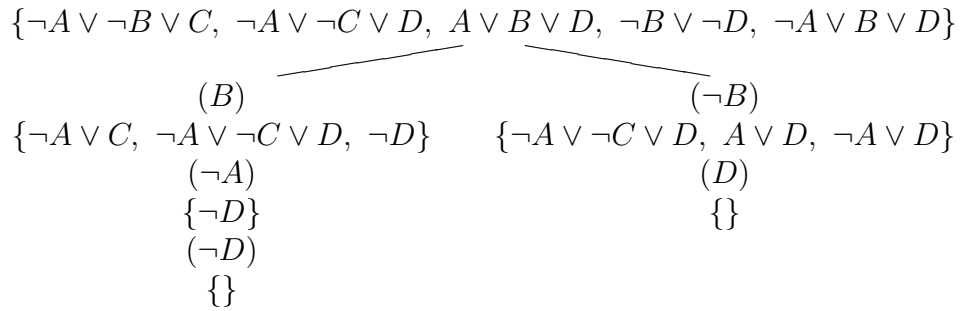
Klausuulijoukko ei ole toteutuva.

3. Ensimmäinen tapa:

$$\{\neg A \vee \neg B \vee C, \neg A \vee \neg C \vee D, A \vee B \vee D, \neg B \vee \neg D, \neg A \vee B \vee D\}$$


Klausuulijoukko on toteutuva. Tällä kertaa tarvittiin vain kaksi haarautumista.

Toinen tapa:



Jos yksikin haara päättyy tyhjään joukkoon, niin klausuulijoukko on toteutuva. Tarkastelu voidaan siis lopettaa heti kun sellainen haara löytyy, ellei nimenomaan haluta löytää kaikkia malleja.