

T-79.5201 Diskreetit rakenteet, syksy 2006

Kotitehtävät 2 (palautus 29.11. klo 12:15 mennessä)

1. Määritä seuraavat generoivat funktiot suoraan ao. kombinatoristen perheiden rakenteen perusteella:

- (a) Egf jonolle $\langle a_n \rangle$, missä a_n = niiden tapojen lukumäärä, joilla n -solmuinen perusjoukko voidaan osittaa tasan kaksialkioisiksi (järjestämättömiksi) pareiksi. (Toisin sanoen a_n = täydellisen n -solmuisen verkon *täydellisten pariutusten* määrä.)
- (b) Egf jonolle $\langle b_n \rangle$, missä b_n = joukon $[n] = \{1, \dots, n\}$ binääripuuositusten lukumäärä, so. sellaisten binääripuiden lukumäärä, joiden kussakin solmussa on jokin perusjoukon $[n]$ epätyhjä osajoukko, joukot ovat erillisiä ja yhdessä kattavat koko perusjoukon. (*Binääripuu* on järjestetty juurrettu puu, jonka jokaiseen solmuun juurtuu kaksi alipuuta, joista jompikumpi tai molemmat voivat olla tyhjiä. Piirtämällä ja laskemalla todetaan, että $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 5$, $b_3 = 43$ jne.)

2. Osoita, että jos kombinatorinen perhe \mathcal{B} voidaan tekijöidä $\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{A}^{[*]}$, niin perheiden \mathcal{B} ja \mathcal{A} eri painoisten alkioiden lukumäärien kesken vallitsee suhde:

$$nb_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k a_k b_{n-k}.$$

(*Vihje*: “ $zD \log$ ”-tempu.) Muodosta tuloksen perusteella rekursiokaava n -solmuisten nimettyjen yhtenäisten verkkojen määrän c_n laskemiseksi ja määritä arvot c_1, \dots, c_6 . (*Ohje*: Määritä ensin *kaikkien* n -solmuisten verkkojen määrä g_n .)

3. Määritä lauseke kieliopin

$$S \rightarrow aSS \mid bS \mid cS \mid d$$

tuottamien n -merkkisten merkkijonojen määrälle. (Jos kielioppiformalismi on sinulle vieras, kysy asiaa luennoijalta.)

4. Arvioi summan $\sum_{k=1}^n k \ln k$ arvoa tarkkuudella $O(1)$. (*Ohje*: Arvioi ensin summaa, jossa on ylärajana $n:n$ sijaan $n - 1$.) Minkä arvion saat tästä tulon $1^1 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot n^n$ kasvunopeudelle $n:n$ suhteen?